Губко М.В.[1]
E-mail: mgoubko@mail.ru

Лекции по принятию решений в условиях нечеткой информации

Версия 1

Настоящие лекции являются частью курса по теории управления социально-экономическими системами, который читается на протяжении многих лет на кафедре проблем управления ИПУ РАН студентам Московского физико-технического института и других ВУЗов. Лекции содержат более подробное изложение материала основного учебника по данному курсу[2]:

1. Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: СИНТЕГ, 1999.

и основаны на книге

2. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: Наука. 1981.

Лекции рассчитаны на 16 академических часов.

Содержание

---

[1] Автор выражает глубокую благодарность д.т.н. проф. Новикову Д.А. за идею написания настоящего учебного пособия, за проявленный интерес и многочисленные ценные замечания.

[2] Ниже ссылки на этот учебник обозначаются [1], а на книгу С.А. Орловского – [2].

Лекция 1. Введение в теорию нечетких множеств

1.1. Вступление. Зачем нужны нечеткие множества.

Для начала дадим определение нечеткого множества, чтобы определить тот объект, с которым мы будем работать на протяжении всех лекций.

В математике давно используется понятие множества – совокупности объектов, выделенных по некоторому признаку. Это понятие является базовым в современной математике и потому не определяется строго, формально. Так, если задано некоторое *базовое множество* X (конечное или бесконечное), то его *подмножеством* (*четким подмножеством*) A называется любое множество, содержащее в себе только элементы множества X (хотя, может быть, и не все его элементы).

Любое подмножество A множества X можно описать его *функцией принадлежности* $\mu_A : X \to \{0; 1\}$, значение которой для элемента $x \in X$ равно единице в том случае, если этот элемент принадлежит множеству A, и нулю – в противном случае.

Соответствие между подмножествами множества X и всевозможными функциями принадлежности $\mu : X \to \{0; 1\}$ является взаимно однозначным, то есть, определив некоторое подмножество, мы можем определить его функцию принадлежности, и обратно, задание функции $\mu : X \to \{0; 1\}$ задает и подмножество множества X.

В четком множестве любой элемент может или принадлежать ему, или не принадлежать, поэтому функция принадлежности принимает лишь два возможных значения – ноль или единица.

В нечетком же множестве (точнее, в нечетком подмножестве базового множества X) любой элемент $x \in X$ может принадлежать множеству с некоторой степенью достоверности, принимающей значения от нуля (элемент достоверно не принадлежит множеству) до единицы (элемент достоверно принадлежит множеству). Соответственно и функция принадлежности нечеткого множества может принимать любое значение из отрезка [0; 1]. Мы определим понятие нечеткого множества через его функцию принадлежности. Пусть X – некоторое обыкновенное (четкое) множество. В дальнейшем мы будем рассматривать его нечеткие подмножества.

Определение 1. *Нечетким множеством* $\widetilde{A}$ в X называется функция $\mu_{\widetilde{A}} : X \to [0; 1]$, которая каждому из элементов множества X ставит в соответствие степень его принадлежности нечеткому множеству[3] $\widetilde{A}$.

Нечеткое множество $\widetilde{A}$ называется *нормальным*, если $\sup\limits_{x \in X} \mu_{\widetilde{A}}(x) = 1$. В противном случае оно называется *субнормальным*. *Носителем* $\operatorname{supp} \widetilde{A}$ нечеткого множества $\widetilde{A}$ называется обычное множество $\operatorname{supp} \widetilde{A} := \{x \in X : \mu_{\widetilde{A}}(x) > 0\}$.

Пример 1. Пусть множество X – это множество всех действительных чисел. Множество A чисел, больших нуля, будет его четким подмножеством с функцией принадлежности

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}.$$

Мы можем определить нечеткое множество $\widetilde{A}$ чисел, «много больших нуля», задав его функцию принадлежности $\mu_{\widetilde{A}}$, например, следующим образом:

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} 1, & x > 100 \\ 0, & x \le 0 \\ 0{,}5 - 0{,}5\cos(\pi x / 100), & 0 < x \le 100 \end{cases}$$

Действительно, числа, меньшие нуля, достоверно не являются много большими нуля, поэтому функция принадлежности в этих точка равна нулю.

---

[3] Далее нечеткие объекты (множества, отношения и т.д.) будут обычно обозначаться волной.

Числа, большие ста, в большинстве приложений (будем считать, что и в нашем случае), достоверно считаются много большими нуля, поэтому функция принадлежности для таких чисел равна единице. По поводу же чисел в интервале между 0 и 100 достоверно сказать, что они являются много большими нуля, нельзя, поэтому функция принадлежности на этом интервале принимает значения между нулем и единицей. В то же время понятно, что чем больше число, тем больше у нас оснований считать его много большим нуля. Поэтому на интервале от нуля до ста функция принадлежности монотонно возрастает. Носителем нечеткого множества $\tilde{A}$ является интервал $(0; +\infty)$.

Функции принадлежности множеств A и $\tilde{A}$ приведены на рисунке 1. •[4]

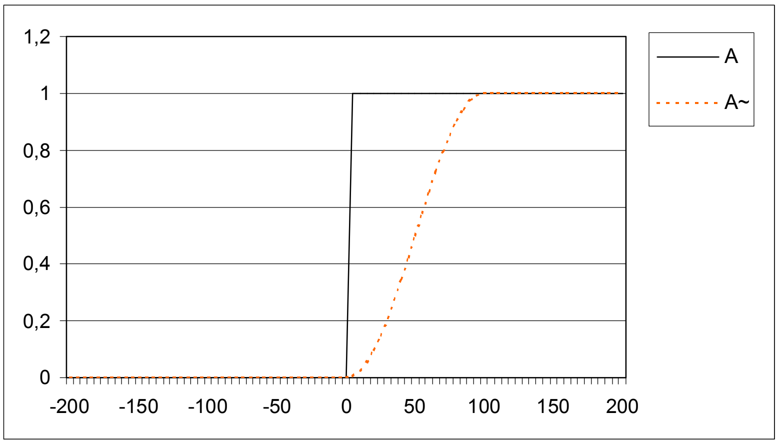

Рисунок 1. Сравнение функций принадлежности четких и нечетких множеств

Зачем же было введено[5] понятие нечеткого множества? Для того же, для чего вводятся и другие математические объекты – чтобы описывать окружающий нас мир. В действительности большинство понятий, которые используют люди в повседневной жизни, являются нечеткими! Когда сапожник ждет *около трех минут* после нанесения клея перед склеиванием, когда хозяйка в соответствии с рецептом кладет в суп *две щепотки* соли, когда менеджер в коммерческой фирме выполняет указание руководства *существенно повысить* объемы продаж – все они выполняют нечеткие инструкции, сформулированные неформально с помощью разговорного языка. Даже формально четкие понятия, используемые в обыденной жизни, воспринимаются людьми как нечеткие. Например, в рецепте может быть четко указано «две чайные ложки соли», но хозяйка понимает, что блюдо не будет испорчено и если будет положено две с половиной ложки, не говоря уже о том, что чайные ложки, вообще говоря, бывают разной емкости.

Удобным способом математического описания неформальных понятий, подобных упомянутым выше, являются нечеткие множества[6].

Пример 2. В теории принятия решений часто приходится оценивать различные величины, имеющиеся в распоряжении *лица, принимающего решение* (*ЛПР*): ресурсы, параметры внешней среды и др. Рассмотрим, например, коммерческую фирму, которая рассматривает возможность проведения рекламной кампании своей продукции. Для того чтобы принять обоснованное решение, фирме необходимо предсказать, как проведение кампании скажется на продажах. Таким образом, руководству фирмы необходимо оценить изменение суммы продаж в результате проведения рекламной кампании.

Если фирма имеет обширный опыт подобной деятельности, у нее могла накопиться статистика динамики продаж в зависимости от проводимых рекламных акций. В этом

[4] Символ «•» здесь и далее означает окончание примера или доказательства.

[5] Zadeh L.A. Fuzzy Sets. Information and Control, 1965, v.8, p. 338-353.

[6] Один из основателей теории нечетких множеств Л. Заде использовал понятие *лингвистических переменных* для того, чтобы подчеркнуть связь между нечеткими множествами и неформальными понятиями обыденной речи.

случае можно считать увеличение продаж случайной величиной[7] и положить в основу оценки ее вероятностное распределение. Подобное распределение могло бы выглядеть, как показано на рисунке 2.

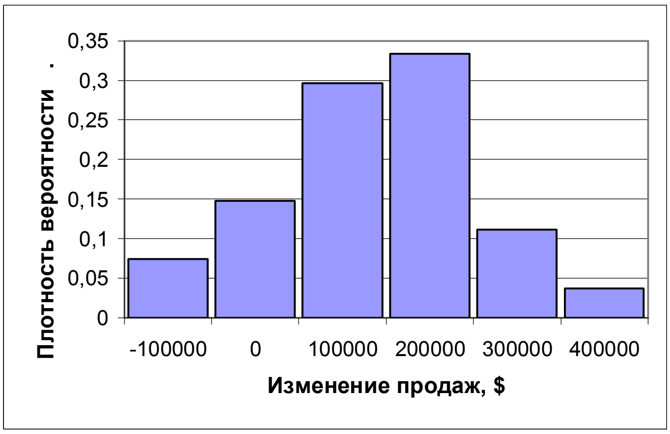

Рисунок 2. Плотность распределения увеличения продаж

Однако понятно, что статистика, необходимая для построения подобной диаграммы, огромна. Насколько часто фирмы имеют в своем распоряжении столь обширную информацию? Стоит также учитывать, что каждая рекламная кампания уникальна – меняется товар, изменяются конкуренты, вкусы и доходы потребителей, и для принятия обоснованного решения необходимо учитывать существующую в данный момент комбинацию этих факторов, которая даже в фирмах-долгожителях раньше встречалось не более нескольких раз. Таким образом, использование методов теории вероятностей при принятии подобного решения является необоснованным – информации слишком мало.

Рисунок 3. Функция принадлежности нечеткого множества «увеличение продаж»

Тем не менее, даже «бедная» статистика в сочетании с экспертными оценками позволяет сформулировать прогноз динамики продаж в терминах нечетких множеств. Пусть, например, эксперты считают, что текущие рыночные условия примерно соответствуют одной из проводимых ранее кампаний, в результате которой продажи поднялись на $100000. Таким образом, **достоверно известно**, что результатом кампании **может** быть увеличение прибыли на $100000, и, следовательно, степень принадлежности точки $100000 нечеткому множеству «увеличение продаж» равна единице. Также эксперты считают, что, с одной стороны, кампания не приведет к уменьшению продаж, с другой же стороны, не стоит рассчитывать на увеличение прибыли более $300000. Нечеткое множество «увеличение продаж» тогда могло бы выглядеть так, как показано на рисунке 3. •

[7] В понимании теории вероятностей.

Язык нечетких множеств имеет существенные преимущества перед языком теории вероятностей в том случае, когда оценки получаются из опроса экспертов. Известно, что люди в большинстве своем неправильно оценивают вероятности (особенно большие и малые). Потому требовать от экспертов – специалистов в конкретных предметных областях, а не математиков, оценок в форме распределения вероятности зачастую невозможно[8]. Использование же полученных результатов для принятия решений можно квалифицировать как самонадеянное. Описание в форме нечетких множеств гораздо менее требовательно к квалификации экспертов и зачастую гораздо точнее отражает суть дела и имеющуюся у ЛПР информацию.

Конечно, за это удобство приходится платить. Предлагаемые теорией решения, основанные на нечеткой информации, и сами несут на себе печать нечеткости. Они могут рассматриваться лишь как рекомендации для ЛПР, требуя от него выбора одного из предлагаемых вариантов. Тем не менее, даже этот факт можно рассматривать как достоинство теории – он показывает, как увеличение информированности ЛПР сказывается на достоверности и правильности принимаемых решений.

1.2. Операции над нечеткими множествами

Для того чтобы построить содержательную теорию нечетких множеств, одного определения мало – необходимо как минимум определить операции (такие как объединение, пересечение и т.п.) над нечеткими множествами, аналогичные операциям над обычными, четкими множествами. Сделать это позволяет аналогия между представлением четких и нечетких множеств в форме их функций принадлежности. Большинство операций над обычными множествами может быть сформулировано через операции над их функциями принадлежности. В то же время, функция принадлежности обычного множества является частным случаем функции принадлежности нечеткого множества, что позволяет *непосредственно* обобщать формулы для четких множеств на нечеткий случай. При этом при применении к четким множествам операция дает обычный результат.

Например, легко проверить, что четкое множество A является подмножеством четкого множества B тогда и только тогда, когда для всех $x \in X$ $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$. Точно так же определим и вложенность для нечетких множеств[9]:

Определение 2. Нечеткое множество $\tilde{A}$ в X *является подмножеством* нечеткого множества $\tilde{B}$ в X ($\tilde{A}$ принадлежит $\tilde{B}$, $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$) если для всех $x \in X$ $\mu_{\tilde{A}}(x) \le \mu_{\tilde{B}}(x)$.

В теории множеств считается, что пустое множество $\varnothing$ принадлежит любому множеству. Также по определению 2 и нечеткое пустое множество с функцией принадлежности $\mu_{\varnothing}(x) \equiv 0$ принадлежит любому нечеткому множеству.

Функцию принадлежности четкого множества $C = A \bigcap B$ – пересечения множеств A и B – можно записать в виде $\mu_C(x) = \min[\mu_A(x);\, \mu_B(x)]$. Действительно, функция принадлежности $\mu_C(.)$ в точке $x \in X$ равна единице (точка x принадлежит множеству C) тогда и только тогда, когда функции принадлежности $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ равны единице (точка x принадлежит одновременно множествам A и B). Эту формулу можно использовать и для пересечения нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, положив по определению

(1) $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) := \min[\mu_{\tilde{A}}(x);\, \mu_{\tilde{B}}(x)]$ для всех $x \in X$.

Однако здесь мы сталкиваемся со следующей трудностью. Функцию принадлежности пересечения обычных множеств можно записать и другим способом, например, так: $\mu_C(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$. Для четких множеств обе формулы дают одинаковые результаты, но для нечетких множеств результат их использования будет отличаться.

---

[8] Без трудоемких итерационных процедур подгонки не удается добиться внутренней непротиворечивости подобных оценок.

[9] Ниже считается, что все нечеткие множества являются подмножествами четкого множества X.

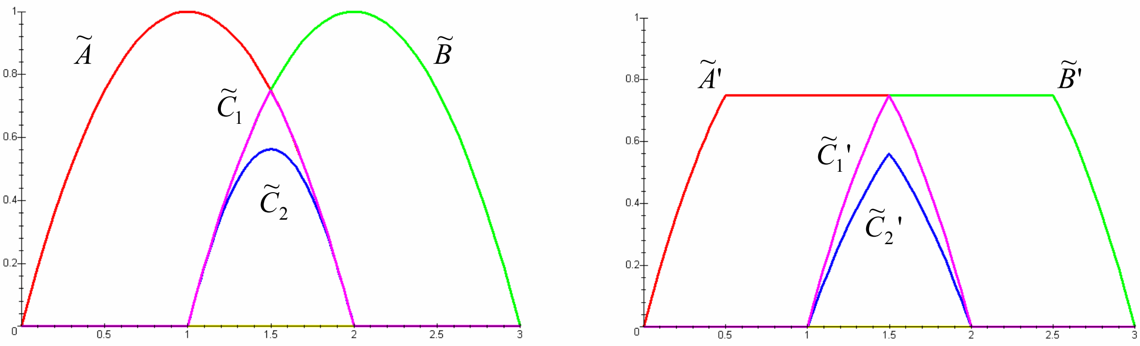

Рисунок 4. Сравнение определений пересечения нечетких множеств

Пример 3. Пусть два эксперта оценили некоторую величину нечеткими множествами $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$. На основе их различающихся оценок необходимо построить совокупную оценку, которая учитывала бы мнения обоих экспертов. В качестве такой совокупной оценки зачастую логично брать пересечение нечетких множеств оценок экспертов. На рисунке 4 слева изображены исходные оценки, совокупная оценка $\widetilde{C}_1$, если для определения пересечения берется минимум функций принадлежности и совокупная оценка $\widetilde{C}_2$, если берется их произведение. В данном примере определение пересечения через произведение функций принадлежности может оказаться более удобным, так как такое произведение более чувствительно к оценкам экспертов. Действительно, пусть исходные оценки изменились, как показано на рисунке 4 справа, что может соответствовать общему уменьшению уверенности экспертов. Из рисунка видно, что, несмотря на это, совокупная оценка для первого определения $\widetilde{C}_1'$ не изменилось. Для второго же определения достоверность совокупной оценки $\widetilde{C}_2'$ уменьшилась, то есть $\widetilde{C}_2' \subseteq \widetilde{C}_2$, что адекватно отражает уменьшение уверенности экспертов. •

Рассмотренный пример показывает, что необходимо принимать то определение пересечения нечетких множеств, которое лучше соответствует содержательной интерпретации конкретной задачи. Тем не менее, есть еще одно соображение, которое может склонить нас к первому определению пересечения (через минимум функций принадлежности).

Для пересечения обыкновенных множеств выполняется свойство поглощения: из того, что $A \subset B$ следует, что $A \cap B = A$. Это свойство остается верным для нечетких множеств, если пересечение определять через минимум функций принадлежности, но нарушается, если пересечение определяется через произведение. Ниже мы будем использовать только первое определение пересечения нечетких множеств, согласно которому $\mu_{\widetilde{A} \cap \widetilde{B}}(x) := \min[\mu_{\widetilde{A}}(x); \mu_{\widetilde{B}}(x)]$ для всех $x \in X$.

Аналогично и операцию объединения нечетких множеств можно определять поразному. Мы будем считать, что функция принадлежности объединения множеств равна максимуму их функций принадлежности.

(2) $\mu_{\widetilde{A} \cup \widetilde{B}}(x) := \max[\mu_{\widetilde{A}}(x); \mu_{\widetilde{B}}(x)]$ для всех $x \in X$.

Упражнение 1. Предложите альтернативное определение операции объединения нечетких множеств, дающее для обычных множеств тот же результат.

Введем также операции пересечения и объединения произвольного семейства нечетких множеств.

Определение 3. Пусть задано семейство нечетких множеств $\widetilde{A}_\lambda$, индексированных параметром $\lambda \in \Lambda$. Их *пересечением* будем называть нечеткое множество $\widetilde{B}$ с функцией принадлежности

(3) $\mu_{\widetilde{B}}(x) := \inf_{\lambda\in\Lambda} \mu_{\widetilde{A}_\lambda}(x)$.

Объединением же множеств $\widetilde{A}_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$ будем называть нечеткое множество $\widetilde{C}$ с функцией принадлежности

(4) $\mu_{\widetilde{C}}(x) := \sup_{\lambda\in\Lambda} \mu_{\widetilde{A}_\lambda}(x)$.

Заметим, что носитель $\mathrm{supp}(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})$ пересечения нечетких множеств $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ равен пересечению $\mathrm{supp}\,\widetilde{A}\cap\mathrm{supp}\,\widetilde{B}$ их носителей, а носитель объединения – объединению носителей.

Определение 4. *Дополнением* нечеткого множества $\widetilde{A}$ называется нечеткое множество $\widetilde{A}'$ с функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{A}'}(x) := 1-\mu_{\widetilde{A}}(x)$.

Здесь и далее дополнения нечетких множеств обозначаются штрихом.

Дополнение часто используется в теории принятия решений для построения отрицаний нечетких понятий. Например, для нечеткого множества «чисел много больших нуля» его дополнением будет множество чисел, «не являющихся много большими нуля».

Для обычных множеств пересечение множества и его дополнения пусто. Как показывает следующий пример, для нечетких множеств это уже не так.

Пример 4. Найдем пересечение нечеткого множества $\widetilde{A}$ чисел, много больших нуля и его дополнения. Пусть функция принадлежности множества $\widetilde{A}$ равна

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} 1, & x > 100 \\ 0, & x \le 0 \\ 0{,}5-0{,}5\cos(\pi x/100), & 0 < x \le 100 \end{cases}$$

тогда его дополнение имеет функцию принадлежности

$$\mu_{\widetilde{A}'}(x) = \begin{cases} 0, & x > 100 \\ 1, & x \le 0 \\ 0{,}5+0{,}5\cos(\pi x/100), & 0 < x \le 100 \end{cases}$$

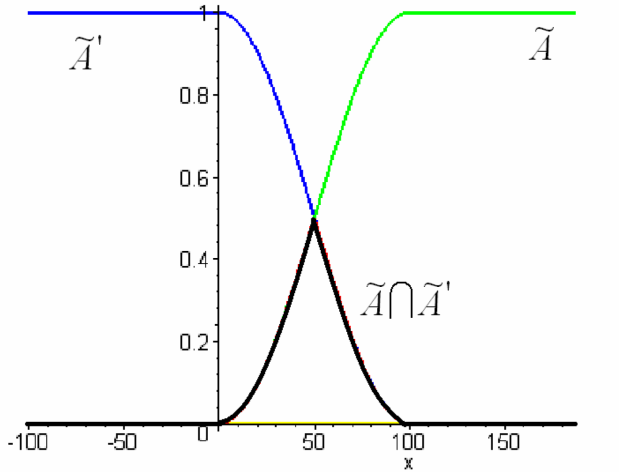

Рисунок 5. Пересечение нечеткого множества и его дополнения

На рисунке 5 изображены функция принадлежности множества $\widetilde{A}$, его дополнения $\widetilde{A}'$, и их пересечения $\widetilde{A}\cap\widetilde{A}'$. Содержательно нечеткое множество $\widetilde{A}\cap\widetilde{A}'$ можно интерпретировать как нечеткое множество чисел, которые являются много большими нуля и одновременно не являющимися много большими нуля. Непустота этого множества является следствием того, что понятие «быть много большим» описано нечетко и в некотором смысле множество $\widetilde{A}\cap\widetilde{A}'$ может рассматриваться как «нечеткая граница» между множеством $\widetilde{A}$ и его дополнением. •

Дополнение нечеткого множества является частным случаем операции разности двух нечетких множеств:

Определение 5. *Разностью* $\widetilde{A} \setminus \widetilde{B}$ нечетких множеств $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ называется нечеткое множество с функцией принадлежности

$\mu_{\widetilde{A}\setminus\widetilde{B}}(x) := \max[\mu_{\widetilde{A}}(x) - \mu_{\widetilde{B}}(x); 0]$.

Таким образом, дополнение нечеткого множества $\widetilde{A}$ в X – это разность $X \setminus \widetilde{A}$.

Для нечетких множеств можно определить и операции, аналогов которых для четких множеств нет. Такова, скажем, операция умножения нечеткого множества на число.

Определение 6. *Произведением нечеткого множества* $\widetilde{A}$ *на число* $\alpha \in [0; 1]$ называется нечеткое множество $\alpha\widetilde{A}$ с функцией принадлежности $\mu_{\alpha\widetilde{A}}(x) = \alpha\mu_{\widetilde{A}}(x)$.

Определим еще одно понятие, которое оказывается очень полезным при анализе нечетких множеств.

Определение 7. *Множеством уровня* $\alpha \in [0; 1]$ нечеткого множества $\widetilde{A}$ называется обыкновенное множество $\widetilde{A}_\alpha := \{x \in X : \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ – множество точек, степень принадлежности которых нечеткому множеству не меньше, чем α.

С использованием операции умножения на число произвольное нечеткое множество $\widetilde{A}$ можно представить в виде объединения его взвешенных множеств уровня по формуле: $\widetilde{A} = \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha\widetilde{A}_\alpha$.

Упражнение 2. Докажите, что $(\widetilde{A} \cup \widetilde{B})_\alpha = \widetilde{A}_\alpha \cup \widetilde{B}_\alpha$, $(\widetilde{A} \cap \widetilde{B})_\alpha = \widetilde{A}_\alpha \cap \widetilde{B}_\alpha$.

Также на базе операции умножения на число для нечетких множеств можно определить еще одно понятие, аналога которого для обыкновенных множеств нет.

Определение 8. *Выпуклой комбинацией* нечетких множеств $\widetilde{A}_1,...,\widetilde{A}_n$ называется нечеткое множество $\widetilde{A}$ с функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{A}}(x) := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_{\widetilde{A}_i}(x)$, где $\alpha_1,...,\alpha_n$ – произвольные неотрицательные числа, сумма которых равна единице: $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

С помощью выпуклой комбинации можно ввести понятие *выпуклого* семейства нечетких множеств – семейства, содержащего все выпуклые комбинации своих элементов. Например, семейство **всех** нечетких множеств в X выпукло. Именно возможность рассматривать выпуклые семейства и выпуклые замыкания является основным техническим преимуществом нечетких множеств перед обыкновенными множествами.

Упражнение 3. Как связаны линии уровня выпуклой комбинации с линиями уровня исходных множеств?

Определение 9. *Декартовым произведением* нечетких множеств $\widetilde{A}_1$ из X_1, …, $\widetilde{A}_n$ из X_n называется нечеткое множество $\widetilde{A}$ в $X = X_1 \times ... \times X_n$ с функцией принадлежности

$\mu_{\widetilde{A}}(x) := \min[\mu_{\widetilde{A}_1}(x_1); ...; \mu_{\widetilde{A}_n}(x_n)]$ для любого $x = (x_1,...,x_n) \in X$.

Итак, основным способом определения операций над нечеткими множествами является обобщение соответствующих операций над обычными обществами.

В следующих лекциях мы обобщим на нечеткий случай более сложные понятия – отображения и бинарные отношения. Именно они лежат в основе теории принятия решений в условиях нечеткой информации.

Лекция 2. Нечеткие отображения и задачи принятия решений

Итак, на прошлой лекции мы ввели понятие нечеткого множества – множества, элементы которого могут принадлежать ему с достоверностью (не вероятностью!) от нуля до единицы. Мы выяснили, что нечеткое подмножество $\widetilde{A}$ универсального множества X описывается своей функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{A}} : X \to [0;1]$.

Мы определили основные теоретико-множественные операции над нечеткими множествами, такие как объединение и пересечение. Так, функция принадлежности объединения нечетких множеств $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ определяется выражением $\mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x) := \max[\mu_{\widetilde{A}}(x); \mu_{\widetilde{B}}(x)]$, а пересечения – выражением $\mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}(x) := \min[\mu_{\widetilde{A}}(x); \mu_{\widetilde{B}}(x)]$.

Также мы определили ряд операций над нечеткими множествами, аналога которым для обычных множеств нет. Это операция умножения нечеткого множества на число и операция выпуклой комбинации нечетких множеств.

На этой лекции мы продолжим обобщать понятия обычной, четкой математики на нечеткий случай. Мы определим понятия нечеткого отображения, образа и прообраза нечеткого множества при нечетком отображении и с их помощью решим две задачи принятия решений – задачу достижения нечеткой цели и задачу оптимизации при нечетких ограничениях.

2.1. Нечеткие отображения

Обычным, *четким отображением* (многозначным) φ множества X во множество Y называется, вообще говоря, произвольное подмножество декартова произведения $X \times Y$, то есть $\varphi \subseteq X \times Y$. Множество X называется *областью определения* отображения, а Y – *областью значений*. Для фиксированного элемента $x^* \in X$ области определения отображения его *образом* при отображении φ называется множество[10] $\varphi(x^*) := \{y \in Y : (x^*, y) \in \varphi\}$. *Образом множества* $A \subseteq X$ при отображении φ называется объединение образов всех элементов A, то есть множество $\varphi(A) := \bigcup\limits_{x\in A} \varphi(x) = \{y \in Y : \exists x \in A, (x, y) \in \varphi\}$.

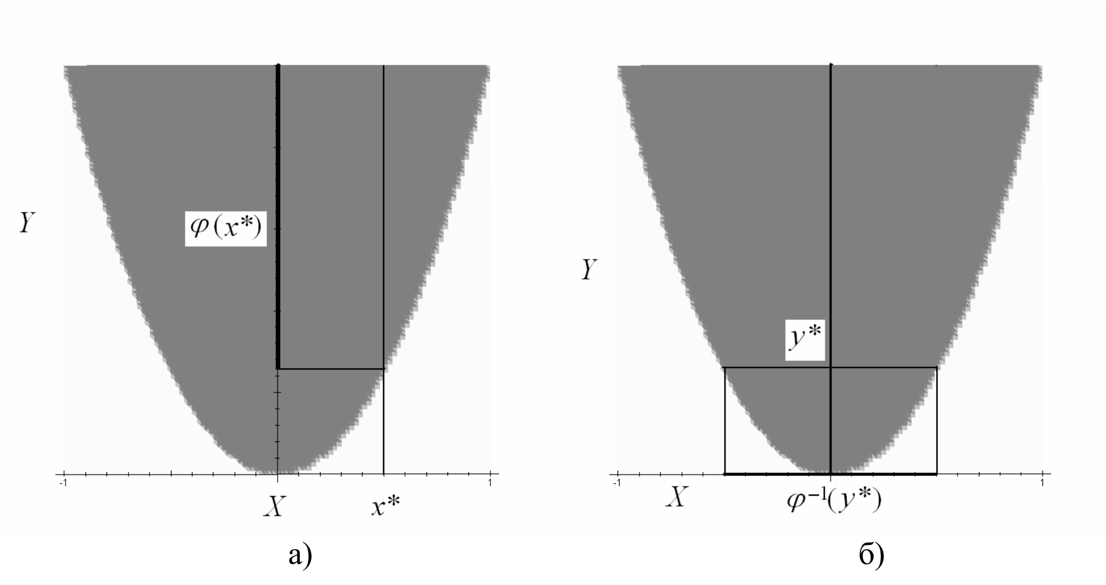

Рисунок 6. Четкое многозначное отображение

[10] Иногда на отображение накладывается дополнительное условие, что образ любого элемента должен состоять не более чем из одного элемента. В этом случае говорят об *однозначных* (*функциональных*) *отображениях*.

Для отображения φ из X в Y *обратным отображением* φ^{-1} называется такое отображение из Y в X, что $(y,x)\in\varphi^{-1} \Leftrightarrow (x,y)\in\varphi$. Образ элемента $y^*\in Y$ при обратном отображении будем обозначать $\varphi^{-1}(y^*)$. Очевидно, он является подмножеством множества X.

Пример 5. Рассмотрим четкое многозначное отображение φ отрезка $X=[-1;1]$ в отрезок $Y=[0;1]$, которое каждой точке $x\in X$ ставит в соответствие множество точек $y\in Y$, больших, чем x^2. В этом случае $\varphi=\{(x,y)\in X\times Y : y > x^2\}$.

Этому отображению соответствует затененная область на рисунке 6. Образом точки $x^*=0.5$ при таком отображении будет интервал $(0.25;1]$ (см. рисунок 6 а), а образом точки $y^*=0.25$ при обратном отображении – интервал $(-0.5;0.5)$ (см. рисунок 6 б). •

Пример 6. В моделях принятия решений важную роль играет отображение, которое каждому возможному действию ЛПР ставит в соответствие реакцию системы на это действие. Пусть, например, действие ЛПР (менеджера по продажам) состоит в выборе суммы инвестиций в рекламу из множества X, а состояние системы (фирмы) описывается суммой ее продаж из множества Y. Однозначное отображение φ из X в Y каждой сумме инвестиций ставит в соответствие сумму результирующих продаж, определяя, по сути, модель системы (фирмы). Типичный вид этого отображения можно задать формулой $\varphi(x)=s(1-\exp(-\lambda x))$, где параметр s – это максимальная емкость рынка, а λ – эластичность спроса. Пусть $s = 10^6$, $\lambda=10^{-5}$. Тогда вложение в рекламу суммы $x=100000$ приводит к сумме продаж $y\approx 632121$, то есть точка $y\approx 632121$ является образом точки $x=100000$ при отображении $\varphi(x)=s(1-\exp(-\lambda x))$. •

Если четкое отображение – это подмножество декартова произведения $X\times Y$ области определения и области значений, что же такое нечеткое отображение? Очевидно – нечеткое подмножество $X\times Y$. Тогда нечеткое отображение $\tilde{\varphi}$ множества X во множество Y можно описать его функцией принадлежности $\mu_{\tilde{\varphi}} : X\times Y \to [0;1]$. Функция принадлежности $\mu_{\tilde{\varphi}}(x,y)$ определяет степень достоверности того, что точка y принадлежит образу точки x при нечетком отображении $\tilde{\varphi}$. И как образом элемента $x^*\in X$ при четком отображении было четкое подмножество множества Y, так же образом $x^*\in X$ при нечетком отображении будет нечеткое подмножество множества Y с функцией принадлежности[11] $\mu_{\tilde{\varphi}}(x^*,y)$. Образом **четкого** множества при нечетком отображении будет объединение образов его элементов: $\mu_{\tilde{\varphi}(A)}(y) := \sup\limits_{x\in A} \mu_{\tilde{\varphi}}(x,y)$.

Однако чтобы завершить обобщение понятия образа на нечеткий случай, необходимо определить образ **нечеткого** множества при нечетком же отображении. Понятно, что образы элементов нечеткого множества должны объединяться с учетом степени принадлежности этих элементов нечеткому множеству. Запишем формулу для образа четкого множества следующим эквивалентным образом, через функцию принадлежности четкого множества A:

$$\mu_{\tilde{\varphi}(A)}(y) := \sup_{x\in X} \min[\mu_A(x); \mu_{\tilde{\varphi}}(x,y)].$$

Эта формула уже допускает непосредственное обобщение на нечеткий случай[12], что позволяет дать следующее определение.

---

[11] Заметим, что x^* фиксировано, и выражение $\mu_{\tilde{\varphi}}(x^*,y)$ действительно задает функцию принадлежности нечеткого подмножества множества Y.

[12] Заменой четкого множества A на нечеткое множество $\tilde{A}$.

Определение 10. *Образом* $\widetilde{\varphi}(\widetilde{A})$ нечеткого множества $\widetilde{A} \subseteq X$ при нечетком отображении $\widetilde{\varphi} : X \to Y$ называется нечеткое подмножество множества Y с функцией принадлежности

(5) $\mu_{\widetilde{\varphi}(\widetilde{A})}(y) := \sup\limits_{x \in X} \min[\mu_{\widetilde{A}}(x);\ \mu_{\widetilde{\varphi}}(x, y)]$.

В частности, если отображение $\varphi : X \to Y$ четкое, то формулу (5) можно упростить, так как под знаком минимума остаются только образы точки y при обратном четком отображении φ^{-1}. Действительно, $\mu_{\varphi(\widetilde{A})}(y) = \sup\limits_{x \in X} \min[\mu_{\widetilde{A}}(x);\ \mu_{\varphi}(x, y)] = \sup\limits_{x: \varphi(x) = y} \mu_{\widetilde{A}}(x) = \sup\limits_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_{\widetilde{A}}(x)$.

Пример 7. Пусть в условиях предыдущего примера реакция системы известна ЛПР лишь неточно, то есть отображение $\widetilde{\varphi}$ является нечетким. Скажем, для каждого выбора суммы инвестиций $x \in X$ его образом при отображении $\widetilde{\varphi}$ является нечеткое множество возможных продаж с функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{\varphi}(x)}(y) = \max[0; 1 - (y - \varphi(x))^2 / x^2]$, где функция «наиболее достоверных продаж» $\varphi(x) = s(1 - \exp(-\lambda x))$ взята из предыдущего примера.

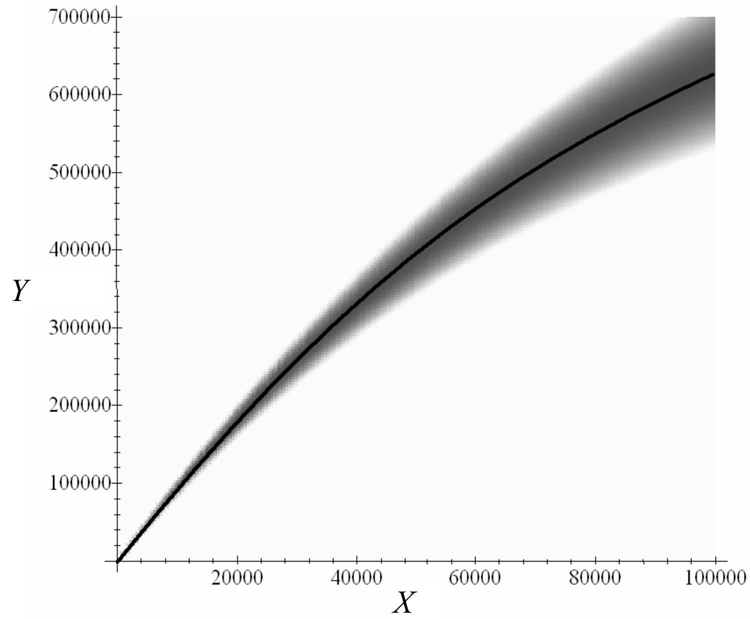

Рисунок 7. Функция принадлежности нечеткого отображения

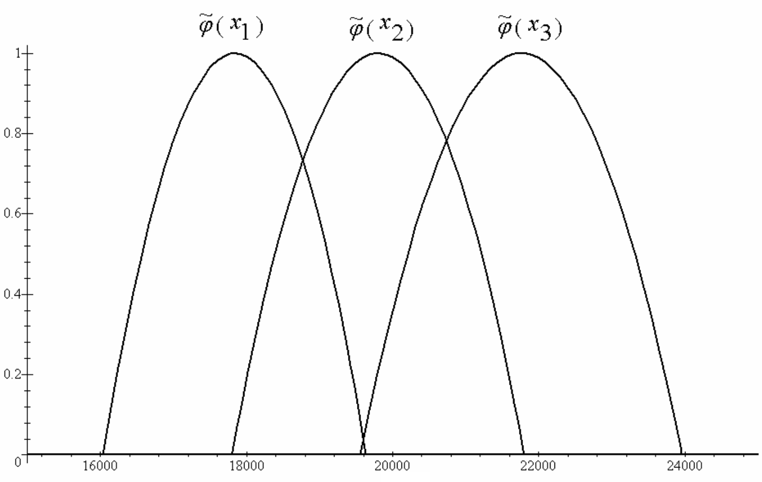

Рисунок 8. Образы точек при нечетком отображении

Функция принадлежности отображения $\tilde{\varphi}$ изображена на рисунке 7, большему значению функции принадлежности соответствует более темный тон. На этом же рисунке изображена кривая $\varphi(x) = s(1 - \exp(-\lambda x))$, на которой функция принадлежности нечеткого отображения принимает максимальное значение, равное единице. На рисунке 8 изображены функции принадлежности образов точек $x_1 = 1800$, $x_2 = 2000$, $x_3 = 2200$ – нечеткая реакция системы на выбор соответствующих объемов инвестиций. Выбор конкретного объема инвестиций можно понимать как четкую инструкцию – «что делать». Пусть, однако, ЛПР (менеджер) хочет узнать реакцию системы (фирмы) на выбор инвестиций в рекламу в размере «примерно 60000». Эта нечеткая инструкция описывается некоторым нечетким множеством $\tilde{A}$, и реакция системы будет образом $\tilde{\varphi}(\tilde{A})$ этого нечеткого множества при нечетком отображении $\tilde{\varphi}$. Образы нечетких множеств удобно строить следующим образом (см. рисунок 9). На нем, так же как и на рисунке 7, изображена функция принадлежности нечеткого отображения $\tilde{\varphi}$. Горизонтальная ось соответствует множеству X и от нее вниз, «вверх ногами» строится функция принадлежности нечеткого множества $\tilde{A}$ – «примерно 60000». Вертикальная ось соответствует множеству Y и от нее влево (повернутой на 90°) строится функция принадлежности образа $\tilde{\varphi}(\tilde{A})$. Стрелки на рисунке 9 показывают направление «переноса» точек нечеткого множества – образ нечеткого множества является объединением образов точек этого множества с учетом их степени принадлежности. •

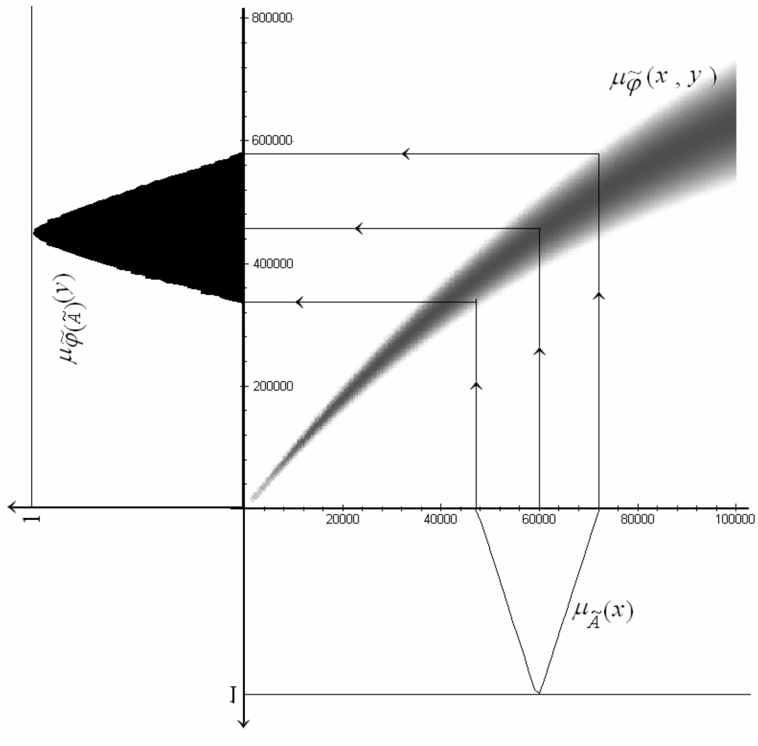

Рисунок 9. Образ нечеткого множества при нечетком отображении

2.2. Прообраз нечеткого множества при нечетком отображении

Как мы увидели из предыдущего раздела, понятие образа нечеткого множества при нечетком отображении позволяет ЛПР вычислять нечеткую реакцию системы на нечеткие же управляющие воздействия. Тем не менее, для теории принятия решений гораздо важнее обратная задача – найти действия, которые приводят к желаемому результату.

Решить данную задачу позволяет понятие прообраза нечеткого множества, описанию которого посвящен настоящий раздел.

Определение 11. *Прообразом* $\widetilde{A} \subseteq X$ нечеткого множества $\widetilde{B} \subseteq Y$ при нечетком отображении $\widetilde{\varphi} : X \to Y$ называется объединение всех нечетких множеств $\widetilde{a}$ таких, что их образ $\widetilde{\varphi}(\widetilde{a})$ принадлежит нечеткому множеству $\widetilde{B}$, то есть таких, что $\sup\limits_{x \in X} \min[\mu_{\widetilde{a}}(x); \mu_{\widetilde{\varphi}}(x, y)] \le \mu_{\widetilde{B}}(y)$ для всех $y \in Y$.

Содержательно, прообраз нечеткого множества $\widetilde{B} \subseteq Y$ – это «максимальное» нечеткое множество $\widetilde{A} \subseteq X$, переходящее в $\widetilde{B}$ при нечетком отображении $\widetilde{\varphi} : X \to Y$.

Таким образом, чтобы для некоторой нечеткой реакции системы определить то действие (возможно, нечеткое), которое приводит к данной реакции, необходимо найти прообраз нечеткого множества реакции.

Можно, однако, заметить, что далеко не любое нечеткое множество имеет непустой прообраз при нечетком отображении, что иллюстрирует следующий пример.

Пример 8. Рассмотрим такое нечеткое отображение $\widetilde{\varphi} : X \to Y$, что для каждого $x \in X$ найдутся как минимум два различных элемента $y_1(x), y_2(x) \in Y$, для которых $\mu_{\widetilde{\varphi}}(x, y_1(x)) > 0$, $\mu_{\widetilde{\varphi}}(x, y_2(x)) > 0$. Найдем прообраз $\widetilde{A} \subseteq X$ «одноточечного» множества $\widetilde{B} \subseteq Y$ с функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{B}}(y^*) > 0$ для некоторого $y^* \in Y$ и $\mu_{\widetilde{B}}(y) = 0$ для остальных $y \in Y$.

Оказывается, его прообраз будет пустым множеством с функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{A}}(x) \equiv 0$. Действительно, пусть найдется такая точка $x^* \in X$, что $\mu_{\widetilde{A}}(x^*) > 0$. Тогда $\min[\mu_{\widetilde{A}}(x^*); \mu_{\widetilde{\varphi}}(x^*, y_1(x^*))] > 0$, $\min[\mu_{\widetilde{A}}(x^*); \mu_{\widetilde{\varphi}}(x^*, y_2(x^*))] > 0$. По определению образа нечеткого множества $\mu_{\widetilde{\varphi}(A)}(y) = \sup\limits_{x \in X} \min[\mu_A(x); \mu_{\widetilde{\varphi}}(x, y)]$, то есть $\mu_{\widetilde{\varphi}(A)}(y_1(x^*)) > 0$, $\mu_{\widetilde{\varphi}(A)}(y_2(x^*)) > 0$, что противоречит определению множества $\widetilde{B}$. •

Пустота прообраза «одноточечного» множества в этом примере имеет простое содержательное объяснение. Это множество можно интерпретировать, как желание ЛПР получить единственный исход с положительной достоверностью, обеспечив нулевую достоверность остальных исходов. Но это невозможно, так как поведение системы нечетко и выбор любого действия приводит к нескольким возможным исходам. Вывод здесь прост – ЛПР должен ставить перед собой реальные цели, смягчая требования к нечеткому множеству результата.

Вычисление прообразов нечетких множеств имеет важное прикладное значение. В то же время, вычисление «по определению» весьма трудоемко. Следующий приводимый без доказательства результат позволяет дать более простую характеризацию прообраза нечеткого множества $\widetilde{B} \subseteq Y$, пригодную для численной реализации.

Определим следующие четкие множества:

$N := \{(x, y) \in X \times Y : \mu_{\widetilde{\varphi}}(x, y) > \mu_{\widetilde{B}}(y)\}$ – множество пар элементов из области определения и области значений отображения, в которых значение функции принадлежности отображения строго превышает значение функции принадлежности множества $\widetilde{B}$.

$N_x := \{y \in Y : (x, y) \in N\}$ – «срез» множества N при фиксированном $x \in X$.

$X^0 := \{x \in X : N_x \ne \varnothing\}$ – множество элементов области определения, для которых множество N_x не пусто.

Теорема 1 [2]. Функция принадлежности прообраза $\widetilde{A} \subseteq X$ нечеткого множества $\widetilde{B} \subseteq Y$ при нечетком отображении $\widetilde{\varphi} : X \to Y$ описывается выражением

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} \inf\limits_{y \in N_x} \mu_{\widetilde{B}}(y), & x \in X^0 \\ 1, & x \in X \setminus X^0 \end{cases}.$$

Проиллюстрируем нахождение прообраза нечеткого множества с помощью этой теоремы следующим примером.

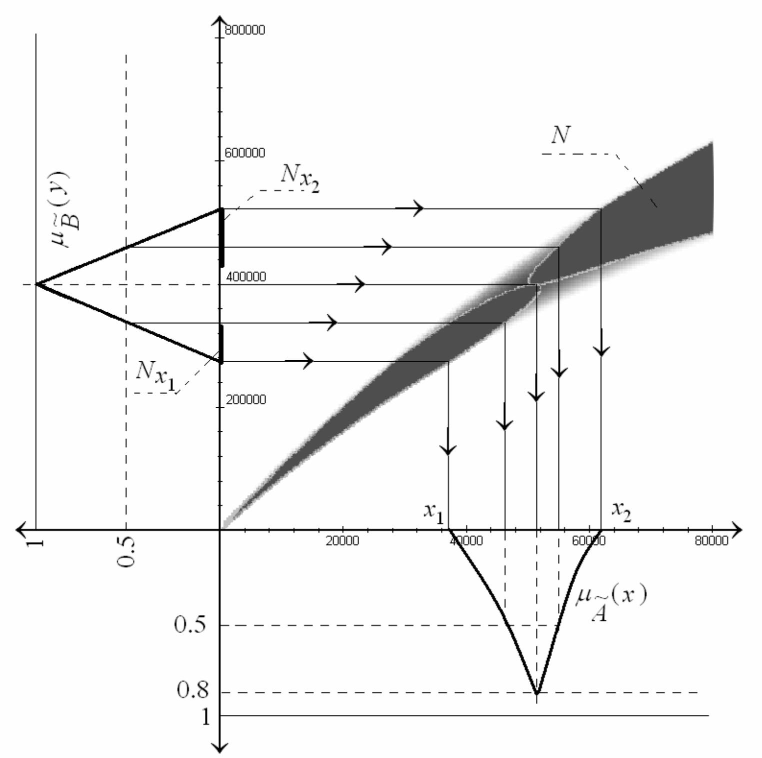

Рисунок 10. Прообраз нечеткого множества при нечетком отображении

Пример 9. Рассмотрим нечеткое отображение $\tilde{\varphi} : X \to Y$ из примера 7. Пусть необходимо найти прообраз нечеткого множества $\tilde{B} \subseteq Y$, функция принадлежности которого изображена на рисунке 10 слева (так же как и на рисунке 9, она изображена повернутой влево на 90°). Также на рисунке для заданных $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{B}$ построено множество *N* – оно изображено черным цветом. Для двух точек, x_1, x_2 на оси *Y* изображены множества N_{x_1}, N_{x_2} – «вертикальные срезы» множества *N* в этих точках. Из рисунка видно, что множество X^0 в данном примере совпадает с множеством *X*, так как для любой точки $x \in X$ множество N_x не пусто. Следовательно, для вычисления значения функции принадлежности прообраза в заданной точке $x \in X$ необходимо найти минимальное значение $\mu_{\tilde{B}}(y)$ на множестве N_x. Так, например, $\mu_{\tilde{A}}(x_1) = \mu_{\tilde{A}}(x_2) = 0$, поскольку соответствующие множества N_{x_1} и N_{x_2} включают точки, в которых $\mu_{\tilde{B}}(.) = 0$.

Стоит отметить, что хотя прообраз в данном примере не пуст, но его образ не совпадает с исходным множеством[13] $\tilde{B}$, так как отображение $\tilde{\varphi}$ «слишком нечеткое» для того, чтобы обеспечить острый пик функции принадлежности множества $\tilde{B}$. •

2.3. Задача достижения нечеткой цели

Итак, мы обобщили на нечеткий случай понятия отображения, образа и прообраза множеств. Этого нам хватит для того, чтобы сформулировать и решить простейшую задачу принятия решения в условиях нечеткой информации.

Задача формулируется так. Есть множество *X* возможных действий ЛПР и множество *Y* состояний управляемой системы. ЛПР в различной степени устраивают различные состояния системы – он стремится достичь своей цели, задаваемой нечетким подмножест-

[13] Максимальное значение функции принадлежности прообраза равно примерно 0.8, а, значит, по формуле (5) , максимальное значение функции принадлежности образа не может превышать 0.8.

вом $\widetilde{G} \subseteq Y$. Для достижения своей цели центр выбирает действия так, чтобы удовлетворить ограничениям на действия, задаваемым нечетким подмножеством $\widetilde{C} \subseteq X$. Состояние, в которое переходит система в зависимости от действия ЛПР, описывается нечетким отображением $\widetilde{\varphi} : X \to Y$.

Задача ЛПР состоит в том, чтобы определить действие (возможно, нечеткое), которое позволило бы ему одновременно достичь цели $\widetilde{G}$ и удовлетворить ограничениям $\widetilde{C}$.

Предположим, что отображение $\widetilde{\varphi}$ – тождественное, и множество действий совпадает с множеством результатов. В этом случае и цель и ограничения являются подмножествами одного и того же множества X, а нечеткое множество $\widetilde{D}$ действий, которые **одновременно** и достигают цели, и удовлетворяют ограничениям, равно пересечению[14] нечетких множеств цели и ограничений, $\widetilde{D} = \widetilde{G} \cap \widetilde{C}$. Тогда множество $\widetilde{D}$ и является решением задачи достижения нечеткой цели.

Пример 10. Рассмотрим задачу, с которой периодически сталкивается каждый студент – задачу подготовки к экзамену. Пусть множество $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ задает возможные уровни подготовки к экзамену (б*о*льшее значение соответствует более интенсивной подготовке), а множество $Y = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ описывает возможные исходы экзамена (оценки). Пусть студента одинаково устраивает как оценка 4, так и 5 (наш студент не гонится за отличной оценкой), но категорически не устраивают оценки 1 или 2. Оценка 3 студента устраивает лишь частично.

Тогда цель студента можно описать нечетким множеством $\widetilde{G}$, функция принадлежности которого приведена в следующей таблице.

y	1	2	3	4	5
$\mu_{\widetilde{G}}(y)$	0	0	0.5	1	1

В то же время (в связи с недостатком времени или способностей) студент ограничен в возможностях подготовки к экзамену, и если возможность подготовки на уровне 1 и 2 не вызывает сомнений, то б*о*льшие уровни подготовленности уже более сомнительны. В следующей таблице приведена функция принадлежности нечеткого множества ограничений $\widetilde{C}$.

x	1	2	3	4	5
$\mu_{\widetilde{C}}(x)$	1	1	0.7	0.6	0.3

Предположим, что отображение, переводящее действия в результат, тождественное, то есть уровень подготовки однозначно определяет оценку на экзамене – уровень подготовки 1 приводит к оценке 1, уровень подготовки 2 – к оценке 2 и так далее.

Тогда задача выбора действия, достигающего цели с учетом ограничений, сводится к нахождению пересечения $\widetilde{D} = \widetilde{G} \cap \widetilde{C}$ множеств цели и ограничений. Функция принадлежности множества $\widetilde{D}$ приведена ниже.

X	1	2	3	4	5
$\mu_{\widetilde{D}}(x) = \min[\mu_{\widetilde{G}}(x); \mu_{\widetilde{C}}(x)]$	0	0	0.5	0.6	0.3

Таким образом, решение задачи достижения нечеткой цели само оказывается нечетким. Эта нечеткость является прямым следствием нечеткости в постановке задачи и может интерпретироваться как нечеткая рекомендация вида «готовиться примерно на 4». Но ведь в реальности то принимается единственное решение! И отдельного рассмотрения требует вопрос о конкретном действии, выбираемом на основе нечеткой рекомендации. •

Часто в качестве четкого решения задачи достижения нечеткой цели предлагается выбор действия, имеющего максимальную степень принадлежности нечеткому решению – множеству $\widetilde{D}$. Так, в рассмотренном примере четкая рекомендация состоит в том, чтобы

[14] Аналогично тому, как пересечение множества синих автомобилей и множества автомобилей марки «Лада» дает «множество синих автомобилей марки «Лада».

готовиться «на четверку». Однако более осторожным и обоснованным представляется подход, в котором ЛПР предоставляется сама нечеткая инструкция, как результат решения нечетко формализованной задачи и дальнейший выбор действия на основе этой рекомендации ЛПР осуществляет самостоятельно, основываясь, возможно, на информации, не нашедшей отражения в модели.

Однако каким образом искать решение задачи в том случае, когда отображение $\tilde{\varphi}$ не является тождественным? В этом случае нечеткие подмножества ограничений $\tilde{C}$ и цели $\tilde{G}$ непосредственно не сравнимы, так как являются подмножествами разных пространств, X и Y соответственно. Однако мы можем отобразить множество цели $\tilde{G}$ во множество действий, найдя его прообраз $\tilde{g}$ при отображении $\tilde{\varphi}$ – нечеткое множество действий, приводящих к заданной нечеткой цели без учета ограничений. Тогда, аналогично рассмотренному выше случаю, решением задачи будет пересечение $\tilde{g} \cap \tilde{C}$ прообраза цели с множеством ограничений.

Пример 11. Пусть в контексте предыдущего примера множества цели и ограничений прежние, а функция принадлежности отображения $\tilde{\varphi}$ задается следующей таблицей.

Y \ X	1	2	3	4	5
1	**1**	**0.6**	0	0	0
2	0	**1**	**0.6**	0	0
3	0	0	**1**	**0.7**	**0.1**
4	0	0	0	**1**	**0.5**
5	0	0	0	0	**1**

Из таблицы видно, что $\tilde{\varphi}$ отражает риск получить оценку худшую, чем выбранный уровень подготовки. Для решения задачи необходимо по теореме 1 найти прообраз нечеткого множества цели при нечетком отображении. Поиск прообраза иллюстрируется следующей таблицей:

	$\mu_{\tilde{g}}(x)$	0	0	0	0.5	1
$\mu_{\tilde{G}}(y)$	Y \ X	1	2	3	4	5
0	1	1	0.6	0	0	0
0	2	0	1	0.6	0	0
0.5	3	0	0	1	0.7	0.1
1	4	0	0	0	1	0.5
1	5	0	0	0	0	1

Черным фоном выделены ячейки из множества *N*. Очевидно, действие $x = 5$ не принадлежит множеству X^0, то есть, по теореме 1, $\mu_{\tilde{g}}(5) = 1$. Для вычисления функции принадлежности любого другого действия необходимо найти минимум **функции принадлежности цели** $\tilde{G}$ по затененным ячейкам столбца таблицы, соответствующего этому действию. Окончательное решение равно пересечению множества $\tilde{g}$ с множеством ограничений $\tilde{C}$ и имеет следующую функцию принадлежности:

X	1	2	3	4	5
$\mu_{\tilde{D}}(x) = \min[\mu_{\tilde{g}}(x); \mu_{\tilde{C}}(x)]$	0	0	0	0.5	0.3

Мы видим, что риск получить худшую оценку ужесточает нечеткую рекомендацию – для достижения цели уже необходимо «готовиться **как минимум** на 4». И даже при этом достоверность достижения цели при выборе уровня подготовки 4 оказывается ниже, чем в предыдущем примере. •

2.4. Задача оптимизации при нечетких ограничениях

Описанный в предыдущем разделе способ решения задачи достижения нечеткой цели называется подходом Беллмана-Заде. Он основан на представлении множества цели и множества ограничений как подмножеств одного пространства и является одной из самых ранних моделей принятия решения в условиях нечеткой информации.

Однако оптимизационные задачи принятия решений чаще формулируются в другой форме – в форме задачи математического программирования.

Четкая задача математического программирования состоит в максимизации функции $\varphi(x)$ – критерия эффективности[15] – на множестве допустимых действий $C \subseteq X$, то есть в поиске допустимого действия $x^* \in Arg\max_{x \in C} \varphi(x)$, доставляющего максимум критерия эффективности. Простейшее обобщение этой задачи на нечеткий случай можно получить, если разрешить множеству ограничений *C* быть нечетким, оставив критерий эффективности четким. Как же можно решить задачу максимизации обыкновенной, четкой функции на нечетком множестве?

Конечно можно, «отнормировав» на единицу максимизируемую функцию, заменить ее нечетким множеством цели $\widetilde{G}$ с функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{G}}(x) = \varphi(x) / \sup_{x \in X} \varphi(x')$ и воспользоваться подходом Беллмана-Заде. Однако это не совсем корректно, так как нормировка именно на единицу представляется малообоснованной (почему не на 0.6, например).

Другой подход к решению задачи оптимизации при нечетких ограничениях основан на введенном в первой лекции понятии множеств уровня нечеткого множества.

В этом подходе задача максимизации функции на нечетком множестве, по сути, заменяется совокупностью задач максимизации функции на множествах уровня множества допустимых альтернатив. При этом если альтернатива $x \in X$ максимизирует критерий эффективности $\varphi(x)$ на множестве $\widetilde{C}_\lambda$ уровня $\lambda \in [0;1]$, то мы, грубо говоря, считаем, что степень принадлежности этой точки нечеткому решению равна λ.

Более формально, если $\widetilde{C}_\lambda := \{x \in X : \mu_{\widetilde{C}}(x) \geq \lambda\}$ – множество уровня нечеткого множества допустимых альтернатив, $N(\lambda) := \{x \in X : \varphi(x) = \sup_{x' \in \widetilde{C}_\lambda} \varphi(x')\}$ – множество точек максимума критерия эффективности на этом множестве уровня, то решением задачи оптимизации называется нечеткое множество $\widetilde{D}_1 \subseteq X$ с функцией принадлежности

(6) $$\mu_{\widetilde{D}_1}(x) = \sup_{\lambda : x \in N(\lambda)} \lambda .$$

Можно показать, что если точка $x \in X$ принадлежит решению с ненулевой достоверностью, то есть $x \in \mathrm{supp}\mu_{\widetilde{D}_1}$, то $\mu_{\widetilde{D}_1}(x) = \mu_{\widetilde{C}}(x)$.

Нечеткому решению $\widetilde{D}_1$ задачи соответствует нечеткое значение максимума критерия эффективности $\varphi(\widetilde{D}_1)$ – образ нечеткого решения $\widetilde{D}_1$ при отображении φ.

Пример 12. Найдем максимум функции продаж $\varphi(x) = 10^6(1 - \exp(-x/10^5))$ на нечетком множестве $\widetilde{C}$ допустимых инвестиций с функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{C}}(x) = \max[0; 1 - (x - 10^5)^2 / 10^9]$ (см. примеры 2 и 7 выше). На рисунке 11 снизу пунктиром изображено множество $\widetilde{C}$ допустимых альтернатив, там же сплошной линией – решение $\widetilde{D}_1$ задачи. Слева изображен нечеткий максимум продаж. Таким образом, достоверно достижим объем продаж примерно 630000, бóльшие же значения продаж менее достоверны. •

[15] Бóльшему значению критерия эффективности соответствует бóльшая желательность данного действия для ЛПР.

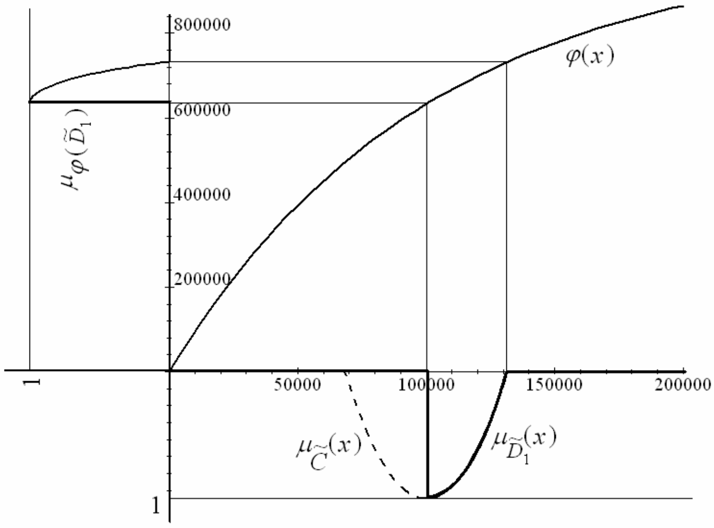

Рисунок 11. Решение задачи оптимизации с нечеткими ограничениями

Следующим логичным обобщением задачи оптимизации является допущение нечеткости оценок альтернатив, когда предпочтительность той или иной альтернативы для ЛПР представляет собой нечеткое множество и отображение φ нечеткое.

Однако для исследования этой задачи нам потребуется ввести понятие нечеткого бинарного отношения, что является темой следующей лекции.

Лекция 3. Принятие решений при нечетком отношении предпочтения

Итак, на первой лекции мы ввели понятие нечеткого множества – множества, элементы которого могут принадлежать ему с достоверностью от нуля до единицы, определили основные теоретико-множественные операции над нечеткими множествами, а также ряд операций, аналога которым для обычных множеств нет.

На второй лекции мы определили понятия нечеткого отображения, образа и прообраза нечеткого множества при нечетком отображении и с их помощью решили задачи достижения нечеткой цели и задачу оптимизации при нечетких ограничениях.

В этих задачах предпочтения ЛПР формулировалась соответственно в терминах нечеткого множества цели и в терминах критерия эффективности. Однако такое описание предпочтений ЛПР возможно не всегда. Более универсальным является представление предпочтений ЛПР с помощью бинарного отношения на множестве альтернатив.

3.1. Нечеткие бинарные отношения и их свойства

Обыкновенным (четким) бинарным отношением R на множестве X называется подмножество декартова произведения $X \times X$. В математике бинарные отношения используются для задания связей между элементами множества *X*. Так, если для некоторой пары *x, y* элементов множества *X* выполнено $(x, y) \in R$, то говорят, что отношение R имеет место для пары (x, y). Иногда в этом случае пишут, что xRy. Классическим примером бинарного отношения является отношение «не меньше» на множестве действительных чисел, для которого $(x, y) \in R \Leftrightarrow x \geq y$.

Пример 13. В теории принятия решений широко используется понятие *отношения предпочтения* на множестве возможных решений (альтернатив) или их исходов, порождаемое сравнительной желательностью для ЛПР исходов при их попарном сравнении. Пара исходов *x*, *y* принадлежит отношению предпочтения, если исход *x* для ЛПР **не хуже**, чем исход *y*. Рассмотрим, например, отношение предпочтения R студента на множестве исходов экзамена $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Понятно, что студент предпочитает оценку 2 оценке 1, оценку 3 оценкам 1 и 2, оценку 4 оценкам 1, 2, 3 и оценку 5 всем прочим оценкам. Для любой пары исходов *x* и *y* будем считать, что $(x, y) \in R$ тогда и только тогда, когда *x* не менее предпочтительно, чем *y*. Тогда, например, $(3, 2) \in R$, $(5, 3) \in R$, но $(2, 4) \notin R$. Отметим также, что любая оценка не хуже себя самой, так что $(x,x) \in R$ для любого $x \in X$. •

Бинарные отношения на конечных множествах удобно изображать в виде таблицы, в которой столбцы и строки соответствуют элементам множества *X*, а в ячейке строки *x* и столбца *y* стоит единица, если $(x, y) \in R$ и ноль – в противном случае.

Пример 14. Матрица отношения предпочтения из предыдущего примера имеет вид

y *x*	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	1	1	0	0
4	1	1	1	1	0
5	1	1	1	1	1

•

Поскольку бинарное отношение на *X* является просто подмножеством $X \times X$, к бинарным отношениям можно применять теоретико-множественные операции, такие как объединение и пересечение. Объединением бинарных отношений R_1 и R_2 называется отношение $R_1 \bigcup R_2$, пересечением – отношение $R_1 \bigcap R_2$, дополнением бинарного отношения R – отношение $(X \times X) \setminus R$. Например, пересечением отношений «не больше» и «не меньше» на множестве действительных чисел будет отношение «равно», а дополнением бинарного отношения предпочтения «лучше» будет отношение «не лучше».

Существуют и операции, специфичные именно для бинарных отношений. Так, для бинарного отношения R можно определить обратное отношение R^{-1}, для которого $xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx$. Произведением отношений R_1 и R_2 называется отношение R, для которого $xRy \Leftrightarrow \exists z \in X : xR_1z, zR_2y$.

Понятие бинарного отношения легко обобщается на нечеткий случай.

Определение 12. *Нечетким бинарным отношением* $\widetilde{R}$ на множестве X называется нечеткое подмножество множества $X \times X$.

Также по аналогии с четким случаем вводятся операции объединения, пересечения и дополнения нечетких отношений. Обратным отношением $\widetilde{R}^{-1}$ к нечеткому отношению $\widetilde{R}$ будет отношение с функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{R}^{-1}}(x, y) = \mu_{\widetilde{R}}(y, x)$.

Пример 15. Нечетким обобщением четкого отношения R «больше» на множестве действительных чисел может служить нечеткое отношение $\widetilde{R}$ «гораздо больше». Для каждой пары чисел x и y значение $\mu_{\widetilde{R}}(x, y)$ определяет степень достоверности, с которой число x может считаться много большим, чем y.

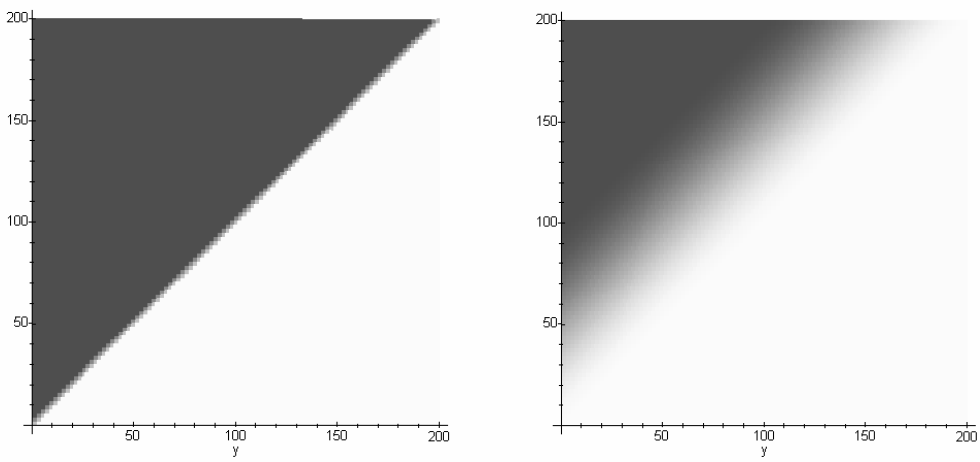

Рисунок 12. Сравнение четких и нечетких бинарных отношений

На рисунке 12 слева изображена функция принадлежности четкого отношения «больше», справа же – нечеткого отношения «много больше» (более темный тон соответствует бо́льшему значению функции принадлежности).

Для определения операции произведения нечетких отношений можно воспользоваться описанной выше техникой записи операции над четкими множествами через их функции принадлежности, что приводит к двум альтернативным определениям произведения.

Определение 13. *Максиминным произведением* нечетких бинарных отношений $\widetilde{R}_1$ и $\widetilde{R}_2$ на X называется нечеткое бинарное отношение $\widetilde{R}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\widetilde{R}}(x, y) = \sup_{z \in X} \min[\mu_{\widetilde{R}_1}(x, z); \mu_{\widetilde{R}_2}(z, y)].$$

Определение 14. *Максимультипликативное произведение* $\widetilde{R}$ нечетких бинарных отношений $\widetilde{R}_1$ и $\widetilde{R}_1$ на X имеет функцию принадлежности

$$\mu_{\widetilde{R}}(x, y) = \sup_{z \in X} [\mu_{\widetilde{R}_1}(x, z) \cdot \mu_{\widetilde{R}_2}(z, y)].$$

Ниже мы будем пользоваться только максиминным произведением нечетких отношений, обозначая произведение отношений $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ через $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$.

В теории принятия решений нечеткие бинарные отношения используются в основном для описания предпочтений ЛПР. Понятно, что не любое бинарное отношение соответствует содержательной интерпретации отношения предпочтения «не хуже чем». Скажем, от рационального отношения предпочтения $\tilde{R}$ стоит ожидать как минимум того, чтобы любой исход был достоверно не хуже себя самого, то есть, чтобы $\mu_{\tilde{R}}(x,x)=1$ для всех $x \in X$. Ниже определяются основные свойства нечетких бинарных отношений и приводятся соответствующие примеры.

Определение 15. Нечеткое бинарное отношение $\tilde{R}$ называется *рефлексивным*, если $\mu_{\tilde{R}}(x,x)=1$ для всех $x \in X$. Если $\mu_{\tilde{R}}(x,x)=0$ для всех $x \in X$, то отношение $\tilde{R}$ называется *антирефлексивным*.

Понятно, что отношение «не хуже» обычно рефлексивно, а отношение «строго лучше» – антирефлексивно.

Определение 16. Нечеткое бинарное отношение $\tilde{R}$ *симметрично*, если для любых $x, y \in X$ $\mu_{\tilde{R}}(x,y)=\mu_{\tilde{R}}(y,x)$ и *антисимметрично*, если из того, что $\mu_{\tilde{R}}(x,y)>0$ следует, что $\mu_{\tilde{R}}(y,x)=0$.

Примером симметричного нечеткого отношения является нечеткая эквивалентность – отношение безразличия альтернатив.

Определение 17. Нечеткое бинарное отношение называется *транзитивным*, если $\tilde{R} \circ \tilde{R} \subseteq \tilde{R}$.

Транзитивность является одним из основных свойств рационального отношения предпочтения. Она означает, что если исход *x* не хуже исхода *z* с достоверностью $\mu_{\tilde{R}}(x,z)$, а исход *z* не хуже исхода *y* с достоверностью $\mu_{\tilde{R}}(z,y)$, то достоверность того, что *x* не хуже *y* не может быть меньше $\min[\mu_{\tilde{R}}(x,z);\ \mu_{\tilde{R}}(z,y)]$.

3.2. Нечеткие отношения предпочтения

В этом разделе мы более подробно остановимся на свойствах нечетких отношений предпочтения. Как уже отмечалось, отношение предпочтения *R* выполнено для пары $x, y \in X$, если альтернатива *x* **не хуже** для ЛПР, чем альтернатива *y*. Однако в реальности ЛПР или эксперты могут не иметь четкого представления о предпочтениях между всеми или некоторыми из альтернатив. В этом случае можно говорить о нечетком отношении предпочтения $\tilde{R}$, функция принадлежности которого для каждой пары $x, y \in X$ определяет достоверность $\mu_{\tilde{R}}(x,y) \in [0;1]$ того, что альтернатива *x* не хуже альтернативы *y*.

От нечеткого отношения предпочтения логично требовать рефлексивности, чтобы любая альтернатива была достоверно не хуже самой себя. Итак,

Определение 18. *Нечетким отношением предпочтения* (*НОП*) на множестве *X* называется произвольное рефлексивное нечеткое бинарное отношение на *X*.

На основе отношения $\tilde{R}$ «не хуже» можно определить отношение строгого предпочтения $\tilde{R}^s$ (отношение «строго лучше») и отношение $\tilde{R}^I$ безразличия между альтернативами.

В четком случае альтернатива $x \in X$ строго предпочитается альтернативе $y \in X$, если *x* «не хуже» *y* (то есть $(x,y) \in R$) но обратное неверно, то есть $(y,x) \notin R$ (иначе говоря, $(x,y) \notin R^{-1}$). Таким образом, $R^s = R \setminus R^{-1}$. Аналогично и в нечетком случае

Определение 19. *Нечетким отношением строгого предпочтения*, соответствующим НОП $\tilde{R}$, называется нечеткое бинарное отношение $\tilde{R}^s = \tilde{R} \setminus \tilde{R}^{-1}$.

По определениям обратного бинарного отношения и разности нечетких множеств имеем, что функция принадлежности отношения строгого предпочтения записывается так:

(7) $\mu_{\widetilde{R}^s}(x,y) = \max[\mu_{\widetilde{R}}(x,y) - \mu_{\widetilde{R}}(y,x); 0]$.

Значение функции принадлежности определяет степень достоверности строго предпочтения между альтернативами. Заметим, что, поскольку НОП $\widetilde{R}$ рефлексивно, отношение строго предпочтения является антирефлексивным и антисимметричным.

Если $\mu_{\widetilde{R}^s}(x,y)$ равно некоторому числу $\lambda \in [0;1]$, то мы будем говорить, что альтернатива *x доминирует* альтернативу *y* с достоверностью λ.

Альтернатива *x* в четком случае *безразлична* альтернативе *y*, если либо одновременно xRy и yRx (то есть как *x* не хуже *y*, так и *y* не хуже *x*), либо одновременно $(x,y) \notin R$, $(y,x) \notin R$ (нет информации, чтобы сравнить эти альтернативы) и, тем самым,

$R^I = ((X \times X) \setminus (R \bigcup R^{-1})) \bigcup (R \bigcap R^{-1})$. Также и в нечетком случае

Определение 20. *Нечетким отношением безразличия*, соответствующим НОП $\widetilde{R}$, называется нечеткое бинарное отношение $\widetilde{R}^I = ((X \times X) \setminus (\widetilde{R} \bigcup \widetilde{R}^{-1})) \bigcup (\widetilde{R} \bigcap \widetilde{R}^{-1})$.

Формула для функции принадлежности нечеткого отношения безразличия более сложная, чем для строгого предпочтения – она выглядит следующим образом:

$\mu_{\widetilde{R}^I}(x,y) = \max[\min[1 - \mu_{\widetilde{R}}(x,y); 1 - \mu_{\widetilde{R}}(y,x)]; \min[\mu_{\widetilde{R}}(x,y); \mu_{\widetilde{R}}(y,x)]]$.

Из этой формулы, а также из рефлексивности НОП $\widetilde{R}$ следует, что отношение безразличия рефлексивно и симметрично.

Пример 16. Пусть предпочтения студента на множестве оценок экзамена задаются следующим НОП:

$\widetilde{R}$ y / x	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	0	1	0.1	0	0
3	1	1	1	0.2	0
4	1	1	0.8	1	0.3
5	1	1	1	0.7	1

Тогда отношения строгого предпочтения и безразличия принимают вид:

$\widetilde{R}^s$ y / x	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	1	0.9	0	0	0
4	1	1	0.6	0	0
5	1	1	1	0.4	0

$\widetilde{R}^I$ y / x	1	2	3	4	5
1	1	1	0	0	0
2	1	1	0.1	0	0
3	0	0.1	1	0.2	0
4	0	0	0.2	1	0.3
5	0	0	0	0.3	1

Мы видим, что оценки 1 и 2 студенту безразличны просто из-за того, что в отношении предпочтения нет информации об их взаимной предпочтительности (возможно, по причине отсутствия опыта получения этих оценок). •

Важным свойством отношения предпочтения является его *линейность* (*или полнота*). В четком случае бинарное отношение *R* называется линейным, если для любой пары альтернатив $x, y \in X$ либо xRy, либо yRx. Это гарантирует, что у ЛПР достаточно информации для того, чтобы сравнивать любые альтернативы. В терминах функции принадлежности свойство линейности выглядит так: для всех $x, y \in X$ $\max[\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)] = 1$.

Однако при обобщении свойства линейности на нечеткие отношения в такой формулировке оно оказывается слишком сильным. Поэтому мы дадим несколько определений линейности НОП:

Определение 21. НОП $\widetilde{R}$ на X называется *сильно линейным*, если для всех $x, y \in X$ $\max[\mu_{\widetilde{R}}(x,y);\ \mu_{\widetilde{R}}(y,x)] = 1$.

Определение 22. НОП $\widetilde{R}$ на X называется λ*-линейным*, если для всех $x, y \in X$ $\max[\mu_{\widetilde{R}}(x,y);\ \mu_{\widetilde{R}}(y,x)] > \lambda$. 0-линейное отношение также будем называть *слабо линейным*.

Таким образом, в λ-линейном отношении для любой пары $x, y \in X$ либо x не хуже y с достоверностью, большей λ, либо наоборот.

Упражнение 4. Докажите, что для сильно линейного НОП $\widetilde{R}$ $\mu_{\widetilde{R}}(x,y) = 1 - \mu_{\widetilde{R}^s}(y,x)$.

3.3. Множество недоминируемых альтернатив

Итак, НОП позволяет сравнивать взаимную предпочтительность альтернатив. Если в задаче принятия решения известно НОП $\widetilde{R}$ ЛПР на множестве альтернатив, то логично задаться вопросом о том, какая же из альтернатив является **наилучшей** с точки зрения ЛПР. Такие альтернативы называют *недоминируемыми*.

Зафиксируем некоторую альтернативу $x_0 \in X$ и рассмотрим нечеткое множество с функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{R}^s}(x_0, y) \subseteq X$. Это нечеткое множество альтернатив, которые доминируются альтернативой x_0. Тогда его дополнение с функцией принадлежности $1 - \mu_{\widetilde{R}^s}(x_0, y)$ будет множеством альтернатив, которые **не** доминируются альтернативой x_0, являясь, в некотором смысле «лучше ее». Мы же интересуемся альтернативами, которые были бы **одновременно лучше любой другой** альтернативы из множества X. Как мы видели ранее, если задано семейство нечетких множеств, каждое из которых обладает некоторым свойством, то для того, чтобы найти нечеткое множество, которое одновременно обладало бы всеми свойствами, надо взять пересечение всех множеств семейства.

Таким образом, по формуле пересечения нечетких множеств мы можем определить *множество недоминируемых альтернатив* с функцией принадлежности

(8) $$\mu_{\widetilde{R}}^{НД}(y) = \inf_{x \in X}[1 - \mu_{\widetilde{R}^s}(x,y)] = 1 - \sup_{x \in X} \mu_{\widetilde{R}^s}(x,y).$$

Пример 17. Рассмотрим отношение предпочтения студента из предыдущего примера. По формуле (8) вычислим множество недоминируемых альтернатив:

Y	1	2	3	4	5
$\mu_{\widetilde{R}}^{НД}(y)$	0	0	0	0.6	1

Альтернатива 5 недоминируема с достоверностью 1. Такие альтернативы мы будем называть *четко недоминируемыми*. Однако и альтернатива 4 недоминируема, хотя и с достоверностью меньше единицы. •

Доказательство следующих простых утверждений мы оставляем в качестве упражнений.

Упражнение 5. Докажите, что $\mu_{\widetilde{R}}^{НД}(y) = 1 - \sup\limits_{x \in X}[\mu_{\widetilde{R}}(x,y) - \mu_{\widetilde{R}}(y,x)]$.

Упражнение 6. Докажите, что для сильно линейного НОП $\mu_{\widetilde{R}}^{НД}(y) = \inf\limits_{x \in X} \mu_{\widetilde{R}}(y,x)$.

Свойства нечеткого множества недоминируемых альтернатив определяются свойствами НОП. В частности, множество недоминируемых альтернатив может оказаться пустым. Приведем соответствующий пример.

Пример 18. Рассмотрим четкое отношение предпочтения вида.

$\widetilde{R}$ y x	1	2	3
1	1	0	1
2	1	1	0
3	0	1	1

Легко проверить, что множество недоминируемых альтернатив для данного отношения пусто. Также легко проверить, что это отношение предпочтения является нетранзитивным. Таким образом, транзитивность отношения предпочтения является важным условием существования недоминируемых альтернатив. •

Степень принадлежности альтернативы множеству недоминируемых альтернатив определяет, в какой мере данная альтернатива не доминируется никакой другой. Поэтому в задаче принятия решения на основе НОП логичным представляется выбор альтернатив, степень принадлежности которых множеству недоминируемых альтернатив максимальна.

Определение 23. *Множеством максимально недоминируемых альтернатив* называется **четкое** множество $X_{\widetilde{R}}^{НД} := \{x \in X : \mu_{\widetilde{R}}^{НД}(x) = \sup\limits_{y \in X} \mu_{\widetilde{R}}^{НД}(y)\}$ альтернатив, степень недоминируемости которых максимальна. Если $\sup\limits_{y \in X} \mu_{\widetilde{R}}^{НД}(y) = 1$, то соответствующее множество $X_{\widetilde{R}}^{НД}$ называется *множеством четко недоминируемых альтернатив*, или *множеством Орловского*, и обозначается $X_{\widetilde{R}}^{ЧНД}$.

Если альтернатива $x \in X_{\widetilde{R}}^{ЧНД}$, то она достоверно не доминируется никакой другой альтернативой и, очевидно, выбор такой альтернативы наиболее предпочтителен. В случае непустого множества четко недоминируемых альтернатив мы получаем, по сути, **четкое решение нечеткой задачи**.

Интересными, поэтому, являются условия, при которых можно гарантировать существование четко недоминируемых альтернатив. На эту тему существует много различных результатов. Мы приведем лишь один из наиболее простых, подчеркивающих важность свойства транзитивности НОП.

Теорема 2 [2]. В конечном множестве альтернатив *X* с заданным на нем транзитивным НОП имеется по крайней мере одна четко недоминируемая альтернатива.

Множество четко недоминируемых альтернатив для сильно линейного НОП обладает еще и следующими важными свойствами.

Теорема 3 [2]. Если отношение $\widetilde{R}$ на множестве альтернатив сильно линейно, то для любой четко недоминируемой альтернативы $x_0 \in X_{\widetilde{R}}^{ЧНД}$ и любой другой альтернативы $x \in X$ $\mu_{\widetilde{R}}(x_0, x) = 1$.

Теорема 4 [2]. Если отношение $\widetilde{R}$ на множестве альтернатив сильно линейно и транзитивно и $x_0 \notin X_{\widetilde{R}}^{ЧНД}$, то для любой альтернативы $x \in X$ $\mu_{\widetilde{R}^s}(x, x_0) > 0$.

Доказательство теорем 2-4 несложно и предлагается в качестве упражнения.

3.4. Общая задача нечеткого математического программирования

В предыдущем разделе мы не отделяли множество альтернатив (действий ЛПР) от множества результатов (состояний системы), считая, что ЛПР может непосредственно выбрать тот или иной результат. Мы выяснили, что в этом случае рациональным выбором ЛПР являются альтернативы (результаты, состояния системы), максимально недоминируемые по НОП.

Однако в большинстве случаев множество действий *X* и множество результатов действий *Y* различны, и действие ЛПР приводит к реакции системы, которая известна лишь нечетко. Для описания подобных ситуаций на прошлой лекции мы ввели нечеткое отображение $\widetilde{\varphi} : X \to Y$, которое каждому действию $x \in X$ ставило в соответствие его образ $\widetilde{\varphi}(x)$ – нечеткую реакцию системы на выбор данного действия.

Таким образом, выбирая то или иное действие $x \in X$, ЛПР, по сути, выбирает то или иное нечеткое множество результатов (исходов) $\widetilde{\varphi}(x)$. Если у ЛПР есть НОП на **множестве нечетких подмножеств** множества *Y*, которое позволяет ему сравнивать по предпочтительности пары нечетких подмножеств, то задача сводится к рассмотренной выше:

среди нечетких множеств $\tilde{\varphi}(x)$ найти максимально недоминируемое по НОП множество $\tilde{\varphi}(x^*)$, которое получается в результате выбора некоторого действия $x^* \in X$.

Тем не менее, в задачах принятия решений обычно считается, что ЛПР имеет НОП $\tilde{R}$ на множестве результатов *Y*. С помощью этого отношения он умеет сравнивать лишь отдельные результаты из множества *Y*, а не нечеткие подмножества результатов. Чтобы выбрать рациональное **действие**, ЛПР должен научиться сравнивать между собой не только исходы, но и действия (нечеткие исходы). Следовательно, мы должны каким либо способом **обобщить** заданное на множестве исходов НОП на класс нечетких подмножеств множества исходов.

На предыдущей лекции мы уже делали нечто похожее, когда расширяли на класс всех нечетких множеств область определения нечеткого отображения.

Мы говорили, что если задано нечеткое отображение $\tilde{\varphi}: X \to Y$, которое каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие нечеткое множество $\tilde{\varphi}(x) \subseteq Y$, то образом произвольного нечеткого множества $\tilde{A} \subseteq X$ при этом отображении будет нечеткое подмножество $\tilde{\varphi}(\tilde{A})$ множества *Y* с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{\varphi}(\tilde{A})}(y) = \sup\limits_{x \in X} \min[\mu_{\tilde{A}}(x); \mu_{\tilde{\varphi}}(x, y)]$.

Но ведь нечеткое бинарное отношение $\tilde{R} \subseteq Y \times Y$ можно рассматривать и как нечеткое отображение $\tilde{R}: Y \to Y$ (формально их определения совпадают). Так, для произвольного результата $y_0 \in Y$ нечеткое множество с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{R}(y_0)}(y) = \mu_{\tilde{R}}(y_0, y)$ можно рассматривать как образ этого результата при нечетком отображении $\tilde{R}$. А образом нечеткого множества $\tilde{A} \subseteq Y$ будет нечеткое множество $\tilde{R}(\tilde{A})$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{R}(\tilde{A})}(y) := \sup\limits_{y' \in Y} \min[\mu_{\tilde{A}}(y'); \mu_{\tilde{R}}(y', y)]$. С другой стороны, для фиксированного результата $y_1 \in Y$ значение $\mu_{\tilde{R}(\tilde{A})}(y_1)$ можно рассматривать как степень выполнения бинарного отношения $\tilde{R}$ для пары, состоящей из нечеткого множества $\tilde{A}$ и отдельного исхода y_1.

Таким образом, мы определили «нечеткое бинарное отношение» $\tilde{R}_1$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{R}_1}(\tilde{A}, y) = \sup\limits_{y' \in Y} \min[\mu_{\tilde{A}}(y'); \mu_{\tilde{R}}(y', y)]$, которое позволяет сравнить по предпочтительности любое нечеткое множество $\tilde{A} \subseteq Y$ с произвольной альтернативой $y \in Y$.

Мы можем продолжить процесс обобщения – заменить альтернативу $y \in Y$ нечетким множеством $\tilde{B}$ и по формуле

(9) $$\mu_{\tilde{R}_2}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sup_{y'' \in Y} \min[\mu_{\tilde{B}}(y''); \mu_{\tilde{R}_1}(\tilde{A}, y'')] = \sup_{y'' \in Y} \min[\mu_{\tilde{B}}(y''); \sup_{y' \in Y} \min[\mu_{\tilde{A}}(y'); \mu_{\tilde{R}}(y', y'')]]$$

найти степень достоверности того, что нечеткое множество $\tilde{A}$ «не хуже» нечеткого множества $\tilde{B}$ по НОП $\tilde{R}$. Таким образом, мы получили искомое обобщение заданного на множестве *Y* НОП $\tilde{R}$ на класс всех нечетких множеств. Обозначим обобщенное (или, как еще говорят, *индуцированное*) НОП через $\tilde{\tilde{R}}$.

Легко показать, что формулу (9) для функции принадлежности индуцированного НОП $\tilde{\tilde{R}}$ можно преобразовать к виду

(10) $$\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sup_{y', y'' \in Y} \min[\mu_{\tilde{A}}(y'); \mu_{\tilde{R}}(y', y''); \mu_{\tilde{B}}(y'')].$$

Подставляя в эту формулу вместо произвольных нечетких множеств образы действий ЛПР при нечетком отображении $\tilde{\varphi}$, получим следующее выражение для индуцированного НОП на множестве действий ЛПР:

(11) $$\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x', x'') = \sup_{y', y'' \in Y} \min[\mu_{\tilde{\varphi}}(x', y'); \mu_{\tilde{R}}(y', y''); \mu_{\tilde{\varphi}}(x'', y'')].$$

Посмотрим, как «работает» индуцированное нечеткое бинарное отношение.

Пример 19. Пусть на числовой оси задано четкое бинарное отношение R «не меньше». Возьмем пару нечетких множеств $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ с функциями принадлежности $\mu_{\widetilde{A}}(x) = \max[0; 1-(x-1)^2]$, $\mu_{\widetilde{B}}(x) = \max[0; 1-2(x-2)^2]$, изображенными на рисунке 13, и выясним, в какой степени $\widetilde{A}$ не меньше, чем $\widetilde{B}$.

Для заданного на числовой оси четкого бинарного отношения «не меньше» формула (10) приобретает более простой вид:

(12) $$\mu_{\widetilde{\widetilde{R}}}(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \sup_{x' \geq x''} \min[\mu_{\widetilde{A}}(x'); \mu_{\widetilde{B}}(x'')].$$

При этом понятно, что максимум в правой части достигается при $x' = x'' = \sqrt{2}$ и равен $2(\sqrt{2}-1)$, то есть $\widetilde{A}$ не меньше, чем $\widetilde{B}$ со степенью достоверности $2(\sqrt{2}-1)$.

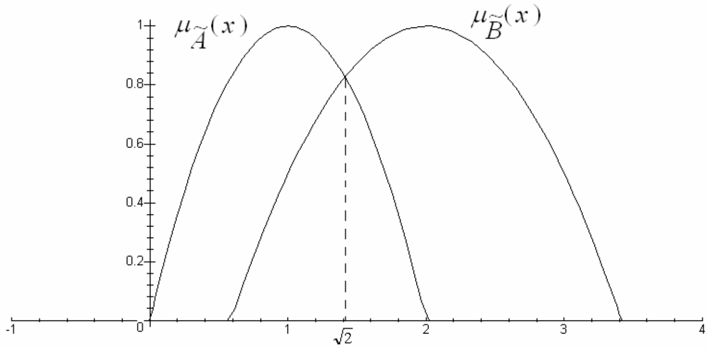

Рисунок 13. Сравнение нечетких множеств по индуцированному НОП

Проверим, в какой степени выполнено обратное отношение, то есть, в какой степени $\widetilde{B}$ не меньше, чем $\widetilde{A}$. Из формулы (12) мы видим, что если точка пика функции принадлежности множества $\widetilde{B}$ лежит правее точки пика функции принадлежности множества $\widetilde{A}$, то степень выполнения индуцированного бинарного отношения равна единице. •

Интересно, что многие свойства исходного нечеткого бинарного отношения сохраняются и в индуцированном бинарном отношении, но не для всех нечетких множеств, а только для нормальных (напомним, что нечеткое множество $\widetilde{A}$ называется нормальным если $\sup_{x \in X} \mu_{\widetilde{A}}(x) = 1$). В частности, справедливы следующие результаты:

Теорема 5 [2]. Если НОП $\widetilde{R}$ на множестве Y рефлексивно, то и индуцированное НОП $\widetilde{\widetilde{R}}$ рефлексивно на множестве всех нормальных нечетких подмножеств множества Y.

Доказательство этой теоремы проводится прямым применением формулы (10). •

Теорема 6 [2]. Если НОП $\widetilde{R}$ на множестве Y сильно линейно, то и индуцированное НОП $\widetilde{\widetilde{R}}$ сильно линейно на множестве всех нормальных нечетких подмножеств Y.

Эту теорему мы оставим без доказательства. •

Легко проверить, что если **четкое** отношение является линейным, то оно является и сильно линейным в смысле определения 21. Отсюда немедленно получаем

Следствие 1 [2]. НОП $\widetilde{\widetilde{R}}$, индуцируемое линейным четким бинарным отношением $\widetilde{R}$ на Y, сильно линейно на множестве всех нормальных нечетких подмножеств Y. •

Однако вернемся к нашей задаче принятия решения. ЛПР выбирает действие x из множества X, приводящее к нечеткому результату $\widetilde{\varphi}(x)$. Предпочтения ЛПР заданы НОП $\widetilde{R}$ на множестве результатов Y. Тогда мы просто строим индуцированное НОП на множестве X и решением задачи будет действие, максимально недоминируемое по этому НОП.

Подставляя формулу (10) для индуцированного НОП в формулу (8), получаем, что множество недоминируемых действий имеет функцию принадлежности

(13) $$\mu^{НД}_{\tilde{\tilde{R}}}(x) = 1 - \sup(\sup_{x' \in X}\ \sup_{y', y'' \in Y} \min[\mu_{\tilde{\varphi}}(x', y'); \mu_{\tilde{R}}(y', y''); \mu_{\tilde{\varphi}}(x, y'')] - \\ - \sup_{y', y'' \in Y} \min[\mu_{\tilde{\varphi}}(x', y'); \mu_{\tilde{R}}(y'', y'); \mu_{\tilde{\varphi}}(x, y'')]).$$

Если при этом образ $\tilde{\varphi}(x)$ любого действия $x \in X$ является нормальным нечетким множеством, а отношение предпочтения $\tilde{R}$ четкое и сильно линейное, то, по следствию 1, и индуцированное НОП будет сильно линейным на множестве *X*. Для сильно линейного НОП множество недоминируемых действий $\mu^{НД}_{\tilde{\tilde{R}}}(x) = \inf_{x' \in X} \mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x, x')$, то есть

(14) $$\mu^{НД}_{\tilde{\tilde{R}}}(x) = \inf_{x' \in X} \sup_{\substack{y', y'' \in Y: \\ y'' R y'}} \min[\mu_{\tilde{\varphi}}(x', y'); \mu_{\tilde{\varphi}}(x, y'')].$$

Несмотря на громоздкость полученных формул, рассмотренный выше подход идейно достаточно прост – нам нужно было научиться сравнивать предпочтительность нечетких множеств, и мы решили эту задачу с помощью индуцированного НОП.

Пример 20. Вернемся к примеру со студентом, готовящимся к экзамену. Студент выбирает уровень подготовки из множества $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. После этого студент получает оценку из множества $Y = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ в соответствии с изображенным в таблице нечетким отображением $\tilde{\varphi} : X \to Y$.

X / *Y*	1	2	3	4	5
1	**1**	**0.6**	0	0	0
2	0	**1**	**0.6**	0	0
3	0	0	**1**	**0.7**	**0.1**
4	0	0	0	**1**	**0.5**
5	0	0	0	0	**1**

Пусть, как в примере 13, предпочтения студента на множестве *Y* заданы обычным четким отношением *R*, согласно которому оценка 2 предпочитается оценке 1, оценка 3 оценке 2 и так далее.

Найдем множество недоминируемых действий студента. Для этого вычислим индуцированное НОП на множестве действий *X* по формуле (12) (мы можем это сделать, так как отношение *R* является четким отношением «не меньше»):

$$\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x', x'') = \sup_{y' \geq y''} \min[\mu_{\tilde{\varphi}}(x', y'); \mu_{\tilde{\varphi}}(x'', y'')].$$

Полученное индуцированное нечеткое отношение предпочтения $\tilde{\tilde{R}}$ на множестве действий студента изображено в следующей таблице:

X / *X*	1	2	3	4	5
1	**1**	**0.6**	0	0	0
2	**1**	**1**	**0.6**	0	0
3	**1**	**1**	**1**	**0.7**	**0.1**
4	**1**	**1**	**1**	**1**	**0.5**
5	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Заметим, что индуцированное НОП $\tilde{\tilde{R}}$ сильно линейно и транзитивно.

Значит, множество недоминируемых действий мы можем искать по формуле $\mu^{НД}_{\tilde{\tilde{R}}}(x) = \inf_{x' \in X} \mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x, x')$, для чего нужно всего лишь найти минимум по каждой строке матрицы НОП. В результате получаем

X	1	2	3	4	5
$\mu^{НД}_{\tilde{\tilde{R}}}(x)$	0	0	0.1	0.5	1

В отсутствие ограничений на действия студента множество $X^{ЧНД}$ четко недоминируемых действий в этом примере не пусто и, как и следовало ожидать, состоит из единственного элемента – «готовиться на 5». •

Пример 21. Найдем множество недоминируемых действий студента в случае, когда нечеткое отображение $\tilde{\varphi}$ реакции системы задано, как в примере 20, а НОП студента на множестве оценок экзамена взято из примера 16:

$\tilde{R}$ y / x	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	0	1	0.1	0	0
3	1	1	1	0.2	0
4	1	1	0.8	1	0.3
5	1	1	1	0.7	1

По формуле (11) найдем индуцированное НОП студента на множестве действий. Оно принимает следующий вид:

X / X	1	2	3	4	5
1	**1**	**0.6**	0	0	0
2	**0.6**	**1**	**0.6**	**0.1**	**0.1**
3	**1**	**1**	**1**	**0.7**	**0.2**
4	**1**	**1**	**1**	**1**	**0.5**
5	**1**	**1**	**1**	**0.7**	**1**

Множество же недоминируемых действий по формуле (8) равно:

X	1	2	3	4	5
$\mu_{\tilde{\tilde{R}}}^{НД}(x)$	0	0.1	0.2	0.8	1

В отсутствие ограничений на действия студента четко недоминируемое действие, как и в предыдущем примере, единственно и равно «готовиться на 5».

Отметим, что в случае, когда имеются нечеткие ограничения на действия студента, как, скажем, в примере 11, мы в общем случае **не можем** найти решение задачи, беря пересечение нечеткого множества недоминируемых действий и множества ограничений. Для учета степени допустимости тех или иных действий ЛПР используется другой подход [2], изложение которого, тем не менее, выходит за рамки настоящего курса лекций. •

Лекция 4. Задача стимулирования в условиях внешней нечеткой неопределенности

На предыдущих лекциях мы рассмотрели несколько задач принятия решений в условиях нечеткой информации – задачу достижения нечеткой цели, задачу оптимизации при нечетких ограничениях, а также общую задачу нечеткой оптимизации, в которой предпочтения ЛПР описывались нечетким бинарным отношением.

Для решения последней задачи мы сформулировали понятие индуцированного нечеткого отношения предпочтения (НОП) – по заданному НОП на множестве результатов действий ЛПР мы построили НОП на множестве действий ЛПР и исследовали, сохраняет ли индуцированное НОП такие свойства исходного НОП, как рефлексивность, транзитивность и полнота (линейность).

Для описания нечеткого множества наилучших с точки зрения ЛПР действий мы ввели понятие нечеткого множества недоминируемых альтернатив – множества действий, которые строго не доминируются никакой альтернативой. Рациональным выбором ЛПР в этой ситуации являются максимально недоминируемые действия – действия, степень принадлежности которых нечеткому множеству недоминируемых альтернатив максимальна. Также были рассмотрены условия, при которых существуют четко недоминируемые альтернативы (для которых эта степень принадлежности равна единице).

Все рассмотренные задачи являются задачами *индивидуального принятия решений*, так как в них имеется только один целенаправленный субъект. Вся настоящая лекция будет посвящена анализу одной задачи управления организационной системой в условиях нечеткой информации – задаче стимулирования. В ней будет уже два целенаправленных субъекта – управляющий орган (центр) и управляемый субъект (агент).

4.1. Описание модели

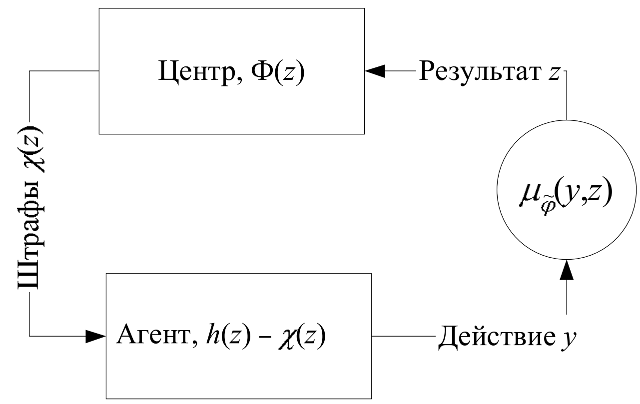

Рисунок 14. Модель организационной системы с внешней нечеткой неопределенностью

Рассмотрим организационную систему [1], состоящую из центра и агента (см. рисунок 14). Агент выбирает действие y из множества допустимых действий A. Это действие приводит к некоторому результату z из множества результатов A_0. Результат связан с действием нечетким отображением $\widetilde{\varphi} : A \to A_0$ с функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{\varphi}}(y,z)$.

Предположение 1. Будем считать, что множества A и A_0 представляют собой отрезки действительной оси.

Для фиксированного действия $y \in A$ нечеткое множество $\widetilde{\varphi}(y) \subseteq A_0$ описывает достоверность реализации того или иного результата в том случае, если агент выберет действие y, то есть $\mu_{\tilde{\varphi}}(y,z)$ – это достоверность реализации результата z при условии, что агент выбрал действие y.

Предположение 2. Будем считать, что образ $\tilde{\varphi}(y)$ любого действия $y \in A$ – нормальное нечеткое множество, то есть для любого действия $y \in A$ найдется достоверно реализуемый результат – такой результат $z \subseteq A_0$, что $\mu_{\tilde{\varphi}}(y,z) = 1$. Кроме того, будем считать, что функция $\mu_{\tilde{\varphi}}(y,z)$ непрерывна по совокупности переменных.

Центр не наблюдает действие агента, а наблюдает только результат. Заинтересованность центра в том или ином результате описывается функцией полезности $\Phi(z)$, агент же в зависимости от результата z получает доход, определяемый значением функции $h(z)$. В общем случае функции $\Phi(z)$ и $h(z)$ различаются – наилучшее для центра действие может быть невыгодным агенту. Таким образом, в системе имеет место столкновение интересов.

Для того чтобы стимулировать агента к выбору нужного действия центр имеет возможность назначать штрафы $\chi(z)$ в зависимости от наблюдаемого им результата z.

Предположение 3. Предполагается, что функция штрафов полунепрерывна снизу, неотрицательна и ограничена сверху константой C, то есть для любого результата $z \subseteq A_0$ $0 \le \chi(z) \le C < +\infty$.

Таким образом, функция полезности агента представляет собой разность дохода и затрат: $f(z) = h(z) - \chi(z)$.

Предположение 4. Будем считать, что функция $h(z)$ дохода агента непрерывна, ограничена сверху и строго однопиковая, то есть строго возрастает до некоторого значения $z_0 \in A_0$, после чего строго убывает.

Рассматривается *задача стимулирования первого рода* [1], то есть сумма штрафов, которые центр взимает с агента, **не прибавляется** к функции полезности центра.

И центр, и агент знают множества A, A_0, функции $\Phi(z)$, $h(z)$ и нечеткое отображение $\tilde{\varphi}$. Поскольку ни центр, ни агент не знают точно, какой конкретный результат реализуется при выборе агентом некоторого действия (связь между действием и результатом описывается нечетким отображением $\tilde{\varphi}$), эта задача называется *задачей стимулирования с внешней нечеткой неопределенностью*. В отличие от нее в *задаче стимулирования с внутренней неопределенностью* предполагается, что агент может точно предсказать результат своих действий, а центр неточно знает функцию дохода агента [1] (эту задачу мы рассматривать не будем).

Порядок функционирования системы следующий. Сначала центр выбирает функцию штрафов $\chi(z)$ и сообщает ее агенту. Зная зависимость штрафов от результата действия, агент выбирает действие $y \in A$, после чего реализуется результат $z \in A_0$. Центр и агент наблюдают результат z и получают доход в размере $\Phi(z)$, $h(z)$ соответственно, после чего центр взимает с агента штраф в размере $\chi(z)$.

4.2. Модель выбора агента

Для того чтобы центр мог выбрать наилучшую с его точки зрения функцию штрафа, он должен предсказать, какое действие выберет рациональный агент при фиксированной функции штрафа. Тогда, зная выбор агента, центр просто выберет штрафы, заставляющие агента выбирать наилучшее с точки зрения центра действие. Итак, пусть штрафы фиксированы, а значит, фиксирована и функция полезности агента $f(z)$.

Функция полезности агента задана на множестве результатов A_0, а выбирать агент должен действие из множества A. Чтобы выбрать наилучшее действие, агент должен уметь сравнивать разные действия по их предпочтительности. Таким образом, чтобы определить правило рационального выбора агента, мы должны найти нечеткое отношение предпочтения (НОП), которое индуцируется на множестве A действий агента функцией полезности $f(z)$ и нечетким отображением $\tilde{\varphi}$. На прошлой лекции мы показали, что индуцированное НОП $\tilde{\tilde{R}}$ можно вычислить по формуле

$$\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(y', y'') = \sup_{z',z''\in A_0} \min[\mu_{\tilde{\varphi}}(y', z');\ \mu_{\tilde{R}}(z', z'');\ \mu_{\tilde{\varphi}}(y'', z'')],$$

где $\tilde{R}$ – это НОП агента на множестве результатов действий. В рассматриваемой задаче отношение предпочтения $\tilde{R}$ на множестве результатов четкое и задается функцией полезности агента, то есть $\mu_{\tilde{R}}(z', z'') = 1$ если $f(z') \geq f(z'')$, и $\mu_{\tilde{R}}(z', z'') = 0$ в противном случае. Тогда выражение для индуцированного НОП на множестве действий агента можно записать в следующем виде:

(15) $$\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(y', y'') = \sup_{\substack{z',z''\in A_0:\\ f(z')\geq f(z'')}} \min[\mu_{\tilde{\varphi}}(y', z');\ \mu_{\tilde{\varphi}}(y'', z'')].$$

На прошлой лекции также было показано, что, если агент имеет НОП на множестве действий, то его рациональный выбор определяется т.н. *нечетким множеством недоминируемых действий*. Для построения этого множества необходимо выделить из индуцированного НОП его строгую компоненту – нечеткое отношение строгого предпочтения. Мы показали, что функция принадлежности строгой компоненты $\tilde{\tilde{R}}_s$ НОП $\tilde{\tilde{R}}$ определяется формулой

$$\mu_{\tilde{\tilde{R}}^s}(y', y'') = \max[\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(y', y'') - \mu_{\tilde{\tilde{R}}}(y'', y');\ 0].$$

Тогда функция принадлежности нечеткого множества недоминируемых действий агента принимает вид

(16) $$\mu^{НД}_{\tilde{\tilde{R}}}(y) = 1 - \sup_{y'\in A} \mu_{\tilde{\tilde{R}}^s}(y', y) = 1 - \sup_{y'\in A}[\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(y', y) - \mu_{\tilde{\tilde{R}}}(y, y')].$$

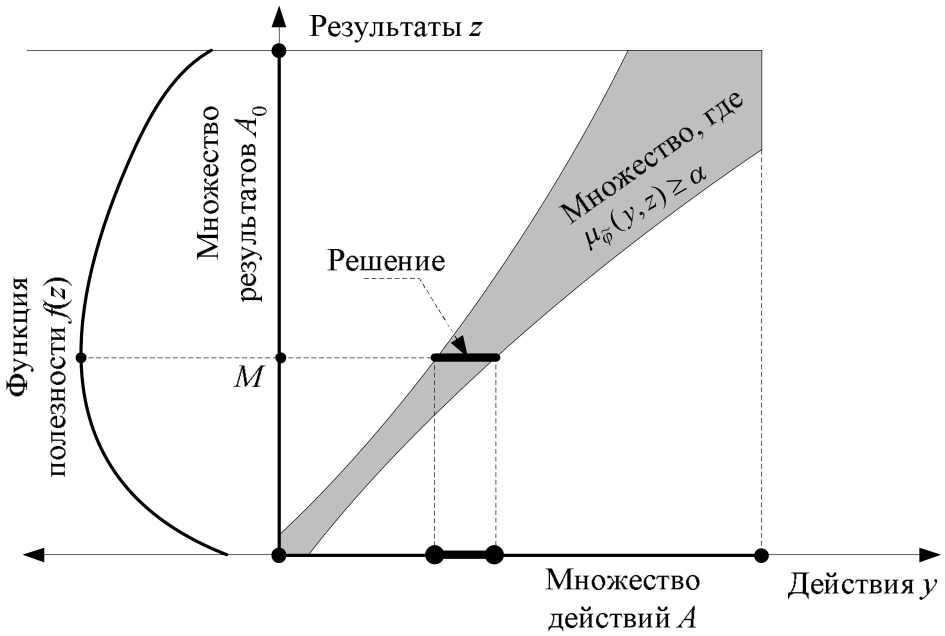

Рисунок 15. К нахождению множества максимально недоминируемых действий агента

Мы будем считать, что агент считает рациональным выбор одной из максимально недоминируемых альтернатив – альтернатив, степень недоминируемости которых максимальна, то есть выбирает действие из множества $X^{НД}_{\tilde{\tilde{R}}} := \{y \in A : \mu^{НД}_{\tilde{\tilde{R}}}(y) = \sup_{y'\in A} \mu^{НД}_{\tilde{\tilde{R}}}(y')\} \subseteq A$.

В частности, если нечеткое множество недоминируемых альтернатив оказывается нормальным, то агент выбирает одну из четко недоминируемых альтернатив.

При фиксированной функции $h(z)$ дохода агента и фиксированном нечетком отображении $\tilde{\varphi}$ действия в результат, множество $X_{\tilde{\tilde{R}}}^{НД}$ максимально недоминируемых альтернатив агента зависит только от назначаемых центром штрафов. Для упрощения записи обозначим множество максимально недоминируемых при заданной функции штрафов $\chi(z)$ действий агента через $P(\chi)$. Будем также называть его *множеством рациональных действий агента при заданных штрафах*.

Итак, при фиксированной функции штрафов $\chi(z)$ агент выбирает некоторое действие из множества $P(\chi) \subseteq A$ рациональных при заданных штрафах действий агента. Остановимся подробнее на способах нахождения этого множества.

Рассмотрим следующую задачу четкой оптимизации:

(17) $f(z) \to \max$ по переменным $z \in A_0$, $y \in A$ при условии, что $\mu_{\tilde{\varphi}}(y,z) \geq \alpha$.

Здесь $\alpha \in [0;1]$ – некоторый параметр.

Графическое решение данной задачи изображено на рисунке 15. В координатах (y, z) серым цветом изображено множество $\{(y,z) : \mu_{\tilde{\varphi}}(y,z) \geq \alpha\}$, на котором производится максимизация. Слева изображена (повернутой на 90°) максимизируемая функция $f(z)$ полезности агента. В точке M достигается ее максимум. Жирной горизонтальной линией показано множество решений задачи (17). Также на горизонтальной оси показана проекция решения на множество A действий агента.

Оказывается, что решение этой задачи тесно связано с нечетким множеством недоминируемых действий агента. В частности, верен следующий результат:

Лемма 1 [2]. Пусть для любого действия $y \in A$ найдется результат $z \in A_0$, который при этом действии реализуется с достоверностью не меньше $\alpha \in [0;1]$, то есть $\mu_{\tilde{\varphi}}(y,z) \geq \alpha$ и предпочтения агента на множестве действий индуцированы функцией полезности $f(z)$ и нечетким отображением $\tilde{\varphi}$. Если пара (y_0, z_0) является решением задачи (17), то степень недоминируемости действия y_0 не меньше α, то есть $\mu_{\tilde{\tilde{R}}}^{НД}(y) \geq \alpha$. Иначе говоря, множество решений задачи (17) является подмножеством множества α-недоминируемых действий.

Доказательство. Итак, пусть пара (y_0, z_0) – решение задачи (17). Из формул (15) и (16) следует, что для доказательства неравенства $\mu_{\tilde{\tilde{R}}}^{НД}(y) \geq \alpha$ необходимо показать, что

$$\sup_{y' \in A}\Big[\sup_{\substack{z',z'' \in A_0:\\ f(z') \geq f(z'')}} \min[\mu_{\tilde{\varphi}}(y',z');\, \mu_{\tilde{\varphi}}(y_0,z'')] - \sup_{\substack{z',z'' \in A_0:\\ f(z') \geq f(z'')}} \min[\mu_{\tilde{\varphi}}(y_0,z');\, \mu_{\tilde{\varphi}}(y',z'')]\Big] \leq 1-\alpha .$$

Допустим противное, то есть предположим, что найдется такое действие $\bar{y} \in A$, и такая (малая) константа $\varepsilon > 0$, что

(18) $$\sup_{\substack{z',z'' \in A_0:\\ f(z') \geq f(z'')}} \min[\mu_{\tilde{\varphi}}(\bar{y},z');\, \mu_{\tilde{\varphi}}(y_0,z'')] - \sup_{\substack{z',z'' \in A_0:\\ f(z') \geq f(z'')}} \min[\mu_{\tilde{\varphi}}(y_0,z');\, \mu_{\tilde{\varphi}}(\bar{y},z'')] > 1-\alpha+\varepsilon .$$

Выберем результат $\bar{z} \in A_0$ таким образом, чтобы достоверность его реализации при действии $\bar{y}$ была не менее $\alpha - \varepsilon$, то есть, чтобы выполнялось неравенство $\mu_{\tilde{\varphi}}(\bar{y},\bar{z}) \geq \alpha - \varepsilon$ (по предположению леммы мы всегда можем это сделать). Поскольку пара (y_0, z_0) – решение задачи (17), функция полезности агента в точке z_0 не меньше, чем в точке $\bar{z}$, то есть $f(z_0) \geq f(\bar{z})$ и, кроме того, $\mu_{\tilde{\varphi}}(y_0,z_0) \geq \alpha$. Но тогда второй член в левой части неравенства (18) должен быть не меньше, чем $\alpha - \varepsilon$. Значит, первый член в левой части этого неравенства превышает 1, что невозможно. Получили противоречие. •

Таким образом, мы можем заключить, что **если задача (17) имеет решение, то множество α-недоминируемых действий не пусто.** •

Какие же условия необходимы для того, чтобы задача (17) имела решение?

Лемма 2 [2]. Если выполнено одно из условий:

1) множества A и A_0 конечны, и для некоторых y, z выполнено $\mu_{\widetilde{\varphi}}(y,z) \geq \alpha$;
2) множества A и A_0 компактны, функции $f(z)$ и $\mu_{\widetilde{\varphi}}(y,z)$ непрерывны, и для некоторых y, z выполнено $\mu_{\widetilde{\varphi}}(y,z) \geq \alpha$;
3) множества A и A_0 компактны, функция $f(z)$ полунепрерывна сверху, а множество $\mu_{\widetilde{\varphi}}(y,z)$ α-нормально (то есть при некоторых y, z достигается максимум $\mu_{\widetilde{\varphi}}(y,z)$, равный α),

то задача (17) имеет решение. •

Это типичные условия достижимости максимума функции, которые доказываются в функциональном анализе. Так как мы предполагали 1-нормальность множества $\mu_{\widetilde{\varphi}}(y,z)$ при любом фиксированном действии $y \in A$, а множества A и A_0 компактны, то нас в основном интересует случай 3 этой леммы для $\alpha = 1$:

Следствие 2. В рамках предположений 1-4 множество четко недоминируемых действий агента не пусто, и любое решение задачи (17) с $\alpha = 1$ ему принадлежит. •

Это следствие говорит о том, что какую бы функцию штрафов не выбрал центр, множество четко недоминируемых действий агента (то есть действий, степень принадлежности которых множеству недоминируемых альтернатив равна единице) будет не пусто. Значит, рациональным выбором агента будет одно из четко недоминируемых действий и множество рациональных действий агента $P(\chi) = X^{ЧНД}_{\tilde{\tilde{R}}(\chi)}$.

4.3. Построение оптимальной функции штрафов

Различные четко недоминируемые действия для агента совершенно равнозначны, поэтому возникает вопрос, а какое именно действие выберет агент, если множество $P(\chi)$ состоит более чем из одного элемента.

Ниже мы будем считать, что выполнена *гипотеза благожелательности* [1], то есть из множества $P(\chi)$ агент выбирает действие, наиболее предпочтительное для центра. Вопрос, что значит «более предпочтительное для центра действие» требует отдельного рассмотрения, ведь предпочтения центра, как и предпочтения агента, заданы на множестве результатов A_0, а не на множестве действий A. Пока мы не будем останавливаться на этом вопросе. Для дальнейшего изложения будет достаточно следующих рассуждений.

Пусть мы определили некоторое параметрическое семейство функций штрафа $\chi_x(z)$. Будем считать, что параметр x этого семейства пробегает множество A_0 результатов действий агента. В качестве примеров можно привести семейства квазикомпенсаторных или скачкообразных функций штрафа.

Пример 22. Семейство $\chi_x^Q(z)$ *квазикомпенсаторных функций штрафов* задается формулой

$$\chi_x^Q(z) = \begin{cases} 0, z = x \\ C, z \neq x \end{cases},$$

где параметр $x \in A_0$ играет роль планового результата. При квазикомпенсаторных штрафах агент максимально штрафуется, если результат z отличается от плана x, при выполнении же плана штраф равен нулю.

Если функция дохода агента строго однопиковая с пиком в точке $z_0 \in A_0$, то семейство $\chi_x^G(z)$ *скачкообразных функций штрафов* задается формулой

$$\chi_x^G(z) = \begin{cases} 0, z \le x \\ C, z > x \end{cases}, \text{ если } x \le z_0, \text{ и } \chi_x^G(z) = \begin{cases} 0, z \ge x \\ C, z < x \end{cases}, \text{ если } x > z_0 .$$

Таким образом, если точка плана *x* лежит левее точки пика $z_0 \in A_0$ функции дохода агента, то агент максимально штрафуется за перевыполнение плана, а если (что более часто встречается на практике) точка плана лежит правее точки пика функции дохода агента, то агент максимально штрафуется за недовыполнение плана. •

Определим множество всех *потенциально реализуемых действий* $P := \bigcup_{\chi} P(\chi)$. Для любого действия *y* из этого множества **найдется** такая функция штрафов $\chi(z)$, что $y \in P(\chi)$.

Если для любого *потенциально реализуемого действия* $y^* \in P$ центр может побудить агента выбрать это действие, используя некоторую функцию штрафов из семейства $\chi_x(z)$ (в условиях гипотезы благожелательности для этого достаточно выбрать значение параметра x^* так, чтобы $y^* \in P(\chi_{x^*})$), то центр при решении задачи стимулирования может ограничиться только функциями штрафа из этого семейства. Центр может так сделать, если $P = \bigcup_{x \in A_0} P(\chi_x)$.

Таким образом, поиск оптимальной (наиболее выгодной для центра) системы штрафов сводится к поиску сначала семейства функций штрафов, с помощью которых можно реализовать все потенциально реализуемые действия агента, а затем – к выбору из этого семейства[16] той функции штрафов, которая побуждает агента наиболее выгодное для центра действие.

Как это часто бывает при решении задач стимулирования, мы будем угадывать оптимальные функции штрафов, а потом доказывать их оптимальность. Такими «угаданными» функциями будут квазикомпенсаторные функции штрафов.

Итак, пусть центр выбрал произвольную функцию штрафов $\chi(z)$. Когда при такой функции штрафов некоторое действие $y^* \in A$ будет четко недоминируемым?

На прошлой лекции мы доказали теорему 6, согласно которой индуцированное на множестве действий НОП сильно линейно, если исходное НОП на множестве результатов сильно линейно. Четкое отношение предпочтения, заданное функцией полезности агента всегда сильно линейно, а, значит, степень принадлежности альтернативы множеству недоминируемых действий можно (см. упражнение 6) определить по формуле

$$\mu_{\tilde{\tilde{R}}}^{НД}(y^*) = \inf_{y \in A} \mu_{\tilde{\tilde{R}}}(y^*, y) .$$

Из теоремы 3 следует, что действие $y^* \in A$ будет четко недоминируемым тогда и только тогда, когда для любого действия $y \in A$ $\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(y^*, y) = 1$, то есть

$$\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(y^*, y) = \sup_{\substack{z', z'' \in A_0: \\ f(z') \ge f(z'')}} \min[\mu_{\tilde{\varphi}}(y^*, z'); \mu_{\tilde{\varphi}}(y, z'')] = 1,$$

то есть для любого действия $y \in A$ найдутся такие результаты $z', z'' \in A_0$, что

(19) $\quad f(z') \ge f(z'')$, $\mu_{\tilde{\varphi}}(y^*, z') = 1, \mu_{\tilde{\varphi}}(y, z'') = 1$.

Иначе говоря, для любого действия $y \in A$ найдется такой достоверно реализуемый при этом действии результат $z'' \in A_0$ и такой достоверно реализуемый при действии $y^* \in A$ результат $z' \in A_0$, что $f(z') \ge f(z'')$.

Введем обозначение $Q(y) = \{z \in A_0 : \mu_{\tilde{\varphi}}(y, z) = 1\}$ для множества результатов, достоверно реализуемых при заданном действии *y*. В соответствии с предположением 2 для любого действия $y \in A$ это множество не пусто.

---

[16] Это множество гораздо уже, чем множество всех возможных функций штрафов.

Введем в рассмотрение функцию $f_L(y,\chi) := \inf\limits_{z\in Q(y)} f(z) = \inf\limits_{z\in Q(y)} [h(z) - \chi(z)]$ – минимальный достоверно достижимый выигрыш агента при выборе им действия y, функцию $f_H(y,\chi) := \sup\limits_{z\in Q(y)} f(z) = \sup\limits_{z\in Q(y)} [h(z) - \chi(z)]$ – максимальный достоверно достижимый выигрыш агента при выборе им действия y. Введем также функции $z_L(y,\chi) := \arg\min\limits_{z\in Q(y)} f(z)$, $z_H(y,\chi) := \arg\max\limits_{z\in Q(y)} f(z)$ – те достоверно достижимые результаты, на которых достигается соответственно минимум и максимум выигрыша агента[17]. Понятно, что если для некоторых z', z'' выполнено условие (19), то оно также выполнено, если положить $z' = z_H(y^*,\chi)$, а $z'' = z_L(y,\chi)$.

Таким образом, мы доказали необходимое и достаточное условие четкой недоминируемости действия $y^* \in A$ агента:

Теорема 7. Действие $y^* \in A$ четко недоминируемо **тогда и только тогда**, когда для любого действия $y \in A$ выполнено одно из двух условий:

1. выполнено неравенство $f_H(y^*,\chi) > f_L(y,\chi)$;
2. выполнено равенство $f_H(y^*,\chi) = f_L(y,\chi)$, и $z_L(y,\chi)$ определено для точки y. •

Определение 24. Будем говорить, что действие $y^* \in A$ *строго четко недоминируемо*, если для любого другого действия $y \neq y^*$ выполнено условие 1 теоремы 7. Остальные четко недоминируемые действия будем называть *нестрого четко недоминируемыми.*

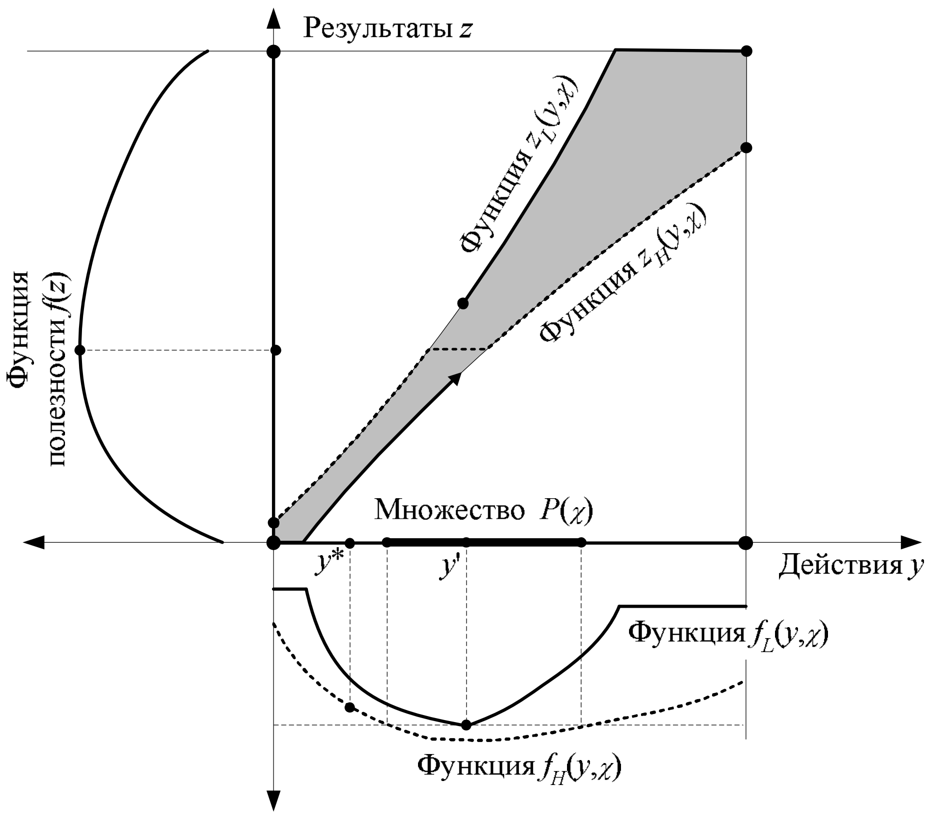

Рисунок 16. Условия на множество четко недоминируемых действий агента

[17] Так как при любой функции штрафов функция полезности агента полунепрерывна сверху, а функция $\mu_{\tilde{\varphi}}(y,z)$ непрерывна, максимум полезности агента всегда достигается, и функция $z_H(y,\chi)$ определена для всех y. Однако минимум функции полезности уже может не достигаться, и функция $z_L(y,\chi)$ может быть неопределенной при некоторых y.

Проиллюстрируем результат теоремы 7 рисунком. На рисунке 16 на плоскости (y, z) серым цветом выделено множество достоверно достижимых результатов, где $\mu_{\tilde{\varphi}}(y,z)=1$; сплошной жирной линией изображена функция $z_L(y,\chi)$, а пунктирной – $z_H(y^*,\chi)$. Внизу рисунка (в перевернутом виде, так что низшим точкам соответствует бо́льшее значение) сплошной линией изображена функция $f_L(y,\chi)$, а пунктирной – $f_H(y^*,\chi)$. Из рисунка видно, что действие y^* в данном случае не будет четко недоминируемым, так как для действия y' неравенство $f_H(y^*,\chi) \geq f_L(y,\chi)$ не выполнено. Множество $P(\chi)$ четко недоминируемых действий агента показано отрезком на оси действий y, при этом концы этого отрезка будут нестрого четко недоминируемыми.

Пусть теперь мы хотим выбрать функцию штрафов так, чтобы некоторое действие $y^* \in A$ было четко недоминируемым. Напомним, что функция штрафов неотрицательна и ограничена сверху константой C. Тогда для любой функции штрафов $f_L(y,\chi) = \min\limits_{z\in Q(y)}[h(z)-\chi(z)] \geq \min\limits_{z\in Q(y)} h(z) - C$ и $f_H(y,\chi) = \max\limits_{z\in Q(y)}[h(z)-\chi(z)] \leq \max\limits_{z\in Q(y)} h(z)$. Обозначим $h_L(y) := \min\limits_{z\in Q(y)} h(z)$, $h_H(y) := \max\limits_{z\in Q(y)} h(z)$ – соответственно минимальное и максимальное значение функции дохода агента на множестве $Q(y)$ достоверно реализуемых результатов[18], тогда вышеприведенные неравенства можно записать в следующем виде: для любой функции штрафов $\chi(z)$ и любого действия $y \in A$ выполнено $f_L(y,\chi) \geq h_L(y) - C$ и $f_H(y,\chi) \leq h_L(y)$.

Значит, по теореме 7, чтобы действие $y^* \in A$ было четко недоминируемым, как минимум, **необходимо**, чтобы для любого другого действия $y \in A$ было выполнено неравенство $h_H(y^*) \geq h_L(y) - C$. Покажем, что это условие является и достаточным в том смысле, что всегда найдется такая функция штрафов, при которой $f_H(y^*) = h_H(y^*)$, и для всех действий $y \in A$ $f_L(y) = h_L(y) - C$. Для доказательства потребуется следующее техническое предположение.

Предположение 5. Отображение $\tilde{\varphi}$ *существенно недетерминированное*, то есть для любого действия $y \in A$ в любой окрестности произвольного достоверно реализуемого результата $z \in Q(y)$ найдется еще как минимум один достоверно реализуемый результат $z' \in Q(y)$.

Рассмотрим параметрическое семейство квазикомпенсаторных функций штрафов:

$$\chi_x^Q(z) = \begin{cases} 0, z = x \\ C, z \neq x \end{cases},$$

при которых агент максимально штрафуется в том случае, если не выполняет план $x \in A_0$.

Для того чтобы сделать действие $y^* \in A$ четко недоминируемым, выберем такой достоверно достижимый при действии y^* результат $z^* \in Q(y^*)$, при котором функция дохода агента достигает максимума, и назначим агенту систему штрафов $\chi_{z^*}^Q(z)$.

Понятно, что для действия y^* выполнено $f_H(y^*) = h_H(y^*)$, так как множество $Q(y^*)$ достоверно реализуемых при действии y^* результатов содержит точку, где штрафы отсутствуют, и при этом достигается максимум функции дохода агента на $Q(y^*)$.

Если при некотором действии y агента минимум его дохода на множестве $Q(y)$ достоверно реализуемых результатов достигается в точке $z \neq z^*$, то при такой системе штрафов $f_L(y) = h_L(y) - C$, так как в точке z взимается максимальный штраф. В противном

[18] В силу непрерывности функции дохода и функции $\mu_{\tilde{\varphi}}(y,z)$ минимум и максимум достигаются.

случае в силу существенной недетерминированности отображения $\tilde{\varphi}$ в любой окрестности точки z^* найдется достоверно реализуемый результат z. Тогда, в силу непрерывности функции дохода агента, $f_L(y)$ также равняется $h_L(y) - C$.

Таким образом, мы доказали следующий результат.

Теорема 8. Если действие $y^* \in A$ можно сделать строго четко недоминируемым с помощью некоторой функции штрафа, то его можно сделать строго четко недоминируемым и с помощью квазикомпенсаторной функции штрафов. При этом действие $y^* \in A$ можно сделать строго четко недоминируемым если $h_H(y^*) > \max_{y \in A} h_L(y) - C$. •

Следствие 3. При решении задачи стимулирования центр может ограничиться квазикомпенсаторными функциями штрафов[19]. •

Теперь легко определить множество P потенциально реализуемых действий. Действительно, если обозначить $H := \max_{y \in A} h_L(y)$, то реализуемы действия, для которых есть такой достоверно реализуемый результат $z \in A_0$, что $h(z) + C \geq H$.

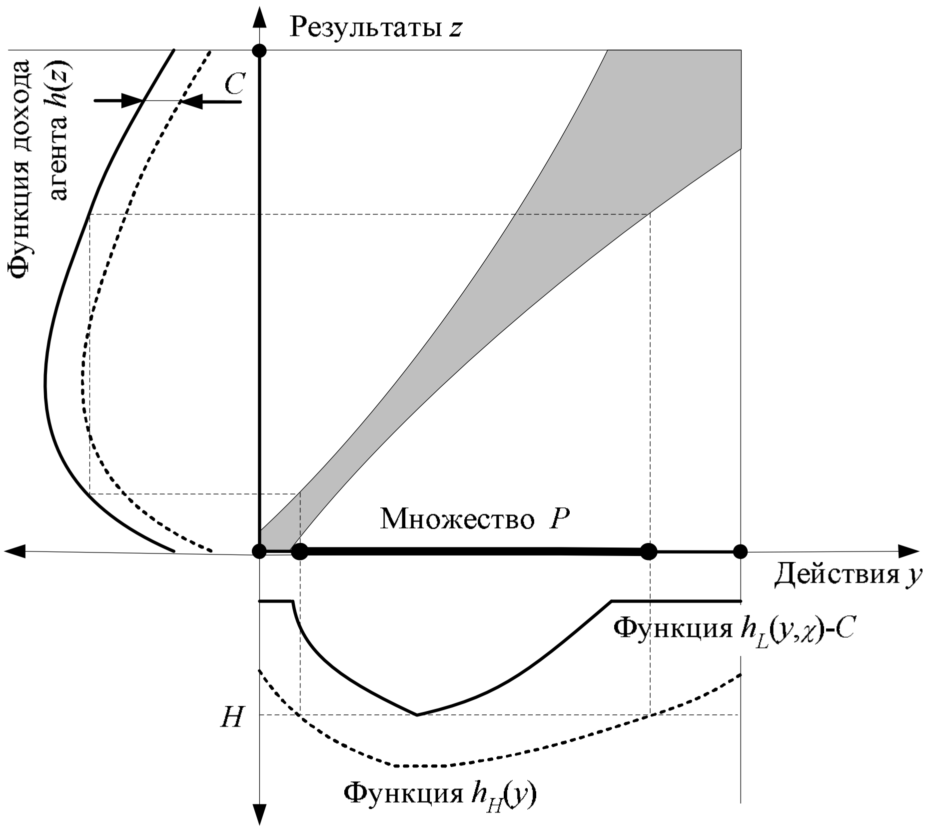

Рисунок 17. Множество P потенциально реализуемых действий

На рисунке 17 слева (повернутой на 90°) изображена функция $h(z)$ дохода агента. Там же пунктиром изображена функция $h(z) - C$. Внизу рисунка (в перевернутом виде) сплошной линией изображена функция $h_L(y) - C$, а пунктиром – функция $h_H(y)$. Там же отмечен уровень H. На горизонтальной оси изображено множество P потенциально реализуемых действий.

[19] Формально говоря, существуют действия, которые нельзя сделать четко недоминируемыми с помощью квазикомпенсаторных штрафов, но можно сделать **нестрого** четко недоминируемыми с помощью какой-нибудь другой функции штрафа. Тем не менее, в большинстве случаев множество таких действий мал*о*, и ими можно пренебречь.

Для решения задачи осталось только определить, какое же конкретное действие из множества P центр хочет заставить выполнить агента. Для этого поступим уже проверенным способом. Центр имеет функцию полезности на множестве результатов действий. Эта функция полезности в сочетании с нечетким отображением $\tilde{\varphi}$ индуцирует НОП центра на множестве A действий агента. Мы сужаем это НОП до множества P потенциально реализуемых действий и по формуле

$$\mu^{НД}_{\tilde{\tilde{R}}_ц}(y^*) = \inf_{y \in P} \sup_{\substack{z', z'' \in A_0: \\ \Phi(z') \geq \Phi(z'')}} \min[\mu_{\tilde{\varphi}}(y^*, z'); \mu_{\tilde{\varphi}}(y, z'')]$$

находим нечеткое множество недоминируемых с точки зрения центра действий.

Значит, центр должен побуждать агента к выбору действия $y^* \in P$ с максимальной степенью принадлежности нечеткому множеству $\mu^{НД}_{\tilde{\tilde{R}}_ц}(.)$. Для этого, как показано выше, центр может использовать квазикомпенсаторную функцию штрафов $\chi^Q_{z^*}(z)$, выбирая план $z^* \in Q(y^*)$ так, чтобы выполнялось равенство $h(z^*) = \max_{z \in Q(y^*)} h(z)$.

Таким образом, задача стимулирования решена: найдено действие, выбора которого центр хочет и может добиться от агента, и найдена (квазикомпенсаторная) функция штрафов, которая действительно побуждает агента к выбору нужного центру действия.

Вкратце исследуем, как множество P потенциально реализуемых действий зависит от степени неопределенности в системе.

Пусть заданы два таких отображения $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}'$, что для любых $y \in A, z \in A_0$ $\mu_{\tilde{\varphi}}(y,z) \leq \mu_{\tilde{\varphi}'}(y,z)$, то есть во втором случае неопределенность выше – при любом действии агента достоверность реализации любого результата возрастает или, по меньшей мере, не убывает.

Понятно, что при переходе от $\tilde{\varphi}$ к $\tilde{\varphi}'$ множество $Q(y)$ результатов, достоверно реализуемых при заданном действии $y \in A$ расширяется (не сужается). При этом функция $h_H(y)$ не убывает, а функция $h_L(y)$ – не возрастает. Значит, по теореме 8, множество P потенциально реализуемых действий агента во втором случае не становится уже, и, поскольку центр может побудить агента к выбору более широкого множества действий, выигрыш центра во втором случае не ниже, чем в первом. То есть **с ростом неопределенности эффективность стимулирования растет.**

Этот парадоксальный результат имеет простое содержательное обоснование. Вспомним, что мы решали задачу в условиях гипотезы благожелательности, согласно которой агент выбирает из множества своих четко недоминируемых действий то действие, которое наиболее выгодно для центра. С ростом неопределенности множество четко недоминируемых действий агента расширяется, так как у него становится меньше информации для сравнения различных действий. Таким образом, при высокой степени неопределенности агент склонен «доверять» центру, выполняя наиболее выгодное для центра действие, что примерно соответствует пословице «меньше знаешь – крепче спишь».

Однако если вместо благожелательности агента предполагать, что из множества четко недоминируемых действий он выберет **наименее выгодное** для центра[20], то тогда можно показать, что с ростом степени неопределенности эффективность стимулирования будет уменьшаться.

[20] Тогда центр может рассчитывать лишь на *максимальный гарантированный результат* [1].